Capítulo 2

Funções Quadráticas

Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com o consumo médio de 500 gramas cada um. Qual deve ser o preço do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Este problema recai numa equação do segundo grau, ou seja, na busca dos zeros de uma função quadrática.

1 A forma canônica

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes, com $a \neq 0$.

Diversos problemas interessantes recaem na consideração de funções quadráticas. Um dos mais antigos consiste em achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p. Se um desses números é x, o outro será $s - x$, logo $x \cdot (s - x) = p$. Efetuando a multiplicação, vem $sx - x^2 = p$ ou seja, $x^2 - sx + p = 0$. Encontrar x (e, portanto, $s - x$) significa resolver a equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$, isto é, achar os valores de x para os quais a função quadrática $f(x) = x^2 - sx + p$ se anula. Esses valores são chamados os *zeros* da função quadrática ou as *raízes* da equação correspondente.

Note que se x for uma raiz da equação $x^2 - sx + p = 0$ então $s - x$ também será, pois

$$(s-x)^2 - s(s-x) + p = s^2 - 2sx + x^2 - s^2 + sx + p = x^2 - sx + p = 0.$$

Portanto as duas raízes dessa equação são os números procurados. Deve-se observar entretanto que, dados arbitrariamente os números s e p, nem sempre existem dois números cuja soma é s e cujo produto é p.

Exemplo 1. Não existem dois números reais cuja soma seja 2 e cujo produto seja 5. Com efeito, como o produto 5 é positivo esses números teriam o mesmo sinal. E como sua soma 2 também é positiva eles dois seriam positivos, logo ambos seriam < 2. Seu produto então seria menor do que 4, portanto diferente de 5. Os números procurados podem também reduzir-se a um único, como no caso em que a soma dada é 6 e o produto é 9, pois a equação $x^2-6x+9=0$, da qual eles são raízes, escreve-se como $(x-3)^2=0$ logo sua única raiz é 3. Já os números cuja soma é 1 e cujo produto é -1 são as raízes da equação $x^2-x-1=0$, que são $(1\pm\sqrt{5})/2$.

Um procedimento útil para estudar a função quadrática é o *completamento do quadrado*. Basicamente, o método de completar o quadrado se resume na observação de que

$$x^2+px=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}\,.$$

Exemplo 2. $x^2+10x=x^2+2\cdot 5\cdot x+5^2-5^2=(x+5)^2-25.$

Exemplo 3. $3x^2+12x+5=3(x^2+4x)+5=3[(x+2)^2-4]+5=3(x+2)^2-7.$

Em geral, dada a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, escrevemos:

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}\,x\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\,.$$

Como veremos logo em seguida, é conveniente escrever $m=-b/2a$ e $k=(4ac-b^2)/4a$. Verifica-se facilmente que $k=f(m)$. Com esta notação, temos, para todo $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=a(x-m)^2+k,\quad \text{onde}\quad m=-b/2a \;\text{ e }\; k=f(m).$$

Esta é a chamada *forma canônica* do trinômio $f(x)=ax^2+bx+c$.

Exemplo 4. Se $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, temos $m = 5/4$, $k = -1/8$, logo a forma canônica deste trinômio é

$$f(x) = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}\,.$$

Escrevendo o trinômio $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ na forma canônica, podemos tirar pelo menos duas conclusões:

1) o menor valor de $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é $-1/8$, obtido quando $x = 5/4$.

2) as raízes da equação $2x^2 - 5x + 3 = 0$ se obtêm escrevendo sucessivamente

$$2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0, \quad 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}\,, \quad \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\,,$$
$$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}\,, \quad x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\,.$$

Logo essas raízes são $x = 1$ e $x = 3/2$.

De um modo geral, a forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$ nos permite concluir que, quando $a > 0$, o menor valor de $f(x)$ é $k = f(m)$ e, quando $a < 0$, $k = f(m)$ é o maior valor de $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

A forma canônica nos fornece também, quando $b^2 - 4ac \geq 0$, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, pois esta igualdade equivale sucessivamente a

$$\begin{aligned}
a(x-m)^2 &= -k,\\
(x-m)^2 &= -k/a = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,,\\
x - m &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,,\\
x &= m \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,,
\end{aligned}$$

uma fórmula muito bem conhecida.

O número $\Delta = b^2 - 4ac$ chama-se o *discriminante* da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vimos acima que, quando $\Delta > 0$, a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais e quando $\Delta = 0$, a mesma equação possui uma única raiz, chamada de *raiz dupla*. Note que $\Delta = -4ak$, portanto $\Delta = 0$ equivale a $k = 0$. Logo, quando $\Delta = 0$, a forma canônica se reduz a $f(x) = a(x - m)^2$, ficando claro então que $f(x) = 0$ somente quando $x = m = -\dfrac{b}{2a}\cdot$ Vemos ainda que, quando $\Delta = -4ak$ é negativo, a e k têm o mesmo sinal, o qual é, neste caso, o sinal de $f(x) = a(x - m)^2 + k$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Logo ela nunca se anula, ou seja, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raiz real.

Exemplo 5. Para a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$, tem-se $f(x) = 2(x^2 - 6x) + 19 = 2(x^2 - 6x + 9) + 1 = 2(x - 3)^2 + 1$, logo $f(x) > 0$ para todo x. Em particular, não se tem $f(x) = 0$ para valor algum de $x \in \mathbb{R}$.

Sejam $\alpha = (-b + \sqrt{\Delta})/2a$ e $\beta = (-b - \sqrt{\Delta})/2a$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Um cálculo imediato nos mostra que $\alpha + \beta = -b/a$ e $\alpha \cdot \beta = (b^2 - \Delta)/4a^2 = c/a$.

Vemos que a média aritmética das raízes, $(\alpha + \beta)/2 = -b/2a$, é igual ao número m tal que $f(m)$ é o menor valor de $f(x)$ (se $a > 0$) ou o maior (quando $a < 0$).

Vemos também que, quando $\Delta \geq 0$, isto é, quando a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui as raízes reais α, β, tem-se

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\right].$$

Logo

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Esta é a chamada *forma fatorada* do trinômio do segundo grau.

A forma fatorada fornece imediatamente a seguinte informação sobre o sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:

> *Se x está situado entre duas raízes da equação $f(x) = 0$ então $f(x)$ tem sinal oposto ao sinal de a. Caso contrário, ou x é raiz ou $f(x)$ tem o mesmo sinal de a.*

Com efeito, o produto $(x-\alpha)(x-\beta)$ é negativo se, e somente se, x está entre α e β.

A afirmação acima inclui o caso em que a equação $f(x)=0$ não possui raiz real. (Então $f(x)$ tem o mesmo sinal de a para todo $x \in \mathbb{R}$.) Inclui também o caso em que essa equação possui uma raiz dupla α. (Então, para todo $x \neq \alpha$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a.)

Vejamos a seguir alguns problemas que envolvem o uso da função quadrática.

Exemplo 6. Mostrar que se dois números positivos têm soma constante, seu produto é máximo quando eles são iguais.

Sejam x, y os números em questão, com $x+y=b$, logo $y=b-x$. Seu produto é $f(x)=x(b-x)=-x^2+bx$, uma função quadrática de x com coeficiente $a=-1<0$, logo $f(x)$ é máximo quando $x=-b/2a=-b/(-2)=b/2$ e daí $y=b-x=b/2$.

Exemplo 7. Tenho material suficiente para erguer 20 m de cerca. Com ele pretendo fazer um cercado retangular de 26 m^2 de área. Quanto devem medir os lados desse retângulo?

Se x e y são as medidas (em metros) dos lados do cercado retangular, temos $x+y=10$. Pelo exemplo anterior, o maior valor possível para a área xy é $5\times 5=25$. Logo, com 20 m de cerca não posso cercar um retângulo de 26 m^2 de área.

Exemplo 8. Mostrar que se o produto de dois números positivos é constante, sua soma é mínima quando eles são iguais.

Sejam x, y números positivos tais que $xy=c$. Os valores possíveis para a soma $s=x+y$ são aqueles para os quais a equação $x^2-sx+c=0$ possui raízes reais, ou seja, o discriminante $\Delta=s^2-4c$ é ≥ 0. Isto significa $s^2\geq 4c$, isto é, $s\geq 2\sqrt{c}$. O menor valor possível para a soma s é portanto $s=2\sqrt{c}$, que torna $\Delta=0$ e a equação $x^2-sx+c=0$ admite a raiz dupla $x=s/2$, portanto $y=s/2$ e os números x, y são iguais.

Exemplo 9. Mostrar que a média aritmética de dois números positivos é sempre maior do que ou igual à média geométrica, sendo igual apenas quando eles são iguais.

Sejam a, b os números dados. Ponhamos $c = ab$. Entre todos os números positivos x, y tais que $xy = c$, a soma $x + y$ é mínima quando $x = y$, ou seja, $x = y = \sqrt{c}$. (Vide Exemplo 8.) Neste caso, a soma mínima é $2\sqrt{c}$. Em particular, como a e b são números positivos cujo produto é c, concluímos que $a + b \geq 2\sqrt{c}$; noutros termos: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, com igualdade valendo apenas quando $a = b$.

Exemplo 10. Na Figura 6, determinar x de modo que a área do paralelogramo inscrito no retângulo seja mínima. Supõe-se que $a \leq b \leq 3a$.

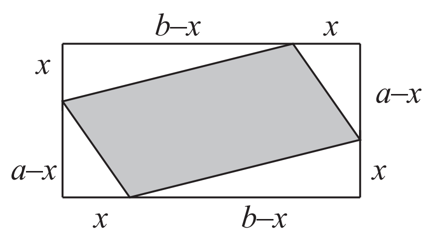

Figura 6

A área do paralelogramo inscrito é

$$f(x) = ab - x(a - x) - x(b - x) = 2x^2 - (a + b)x + ab.$$

Os dados do problema impõem que $0 \leq x \leq a$. O mínimo de $f(x)$ é atingido no ponto $m = (a + b)/4$ e vale $f(m) = ab - (a + b)^2/8$. A condição $b \leq 3a$ equivale a $(a + b)/4 \leq a$, logo $m \leq a$, portanto a solução obtida é legítima.

Exemplo 11. Dois comerciantes formam uma sociedade com o capital de 100 mil reais. Um deles trabalha 3 dias por semana e o outro 2. Após algum tempo, desfazem a sociedade e cada um recebe 99 mil reais. Qual foi a contribuição de cada um para o capital da sociedade?

Um dos sócios entrou com x e o outro com $100 - x$ mil reais. Seus lucros foram $99 - x$ e $99 - (100 - x) = x - 1$ mil reais respectivamente. Sem perda de generalidade, podemos supor que a sociedade durou 5 dias. Os lucros de cada um por dia de serviço foram respectivamente $(99 - x)/2$ e $(x - 1)/3$ mil reais. Cada mil reais aplicados deu, por dia de serviço, o lucro

$$\frac{99 - x}{2x} = \frac{x - 1}{2(100 - x)} .$$

(Esta equação exprime a equitatividade da sociedade.) Daí vem a equação $x^2 - 595x + 29700 = 0$, cujas raízes são 55 e 540. Como $540 > 100$, a única raiz que serve é $x = 55$. Assim, um sócio contribuiu com o capital inicial de 55 mil reais e o outro com 45 mil.

Observação: Se, ao montar a equação do problema, tivessémos chamado de x o capital inicial do sócio que trabalhou 3 dias por semana, teríamos

$$\frac{99 - x}{3x} = \frac{x - 1}{2(100 - x)} ,$$

o que nos levaria à equação $x^2 + 395x - 19800 = 0$, cujas raízes são 45 e -440. Desprezando a raiz negativa, concluiríamos ainda que o sócio que trabalhou 3 dias por semana entrou com 45 mil reais e o outro com 55. Obtemos portanto a mesma resposta, a partir de uma equação diferente.

2 O gráfico de uma função quadrática

O gráfico de uma função quadrática $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, é o subconjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ formado pelos pontos $(x, ax^2 + bx + c)$, cuja abscissa é um número real arbitrário x e cuja ordenada é o valor $f(x)$ que a função assume no ponto x. Começaremos mostrando que G é uma parábola. Isto requer a definição seguinte.

Consideremos no plano uma reta d e um ponto F fora dela. A *parábola* de *foco* F e *diretriz* d é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes do ponto F e da reta d (Figura 7).

Lembremos que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

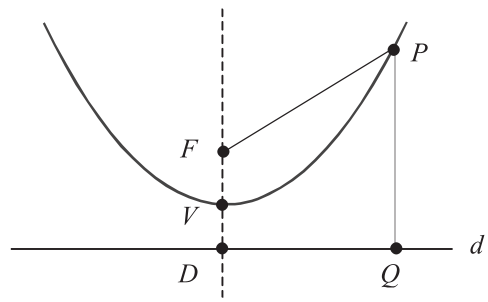

Figura 7

A reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz chama-se o *eixo* da parábola. Chama-se *vértice* da parábola ao ponto dessa curva que está mais próximo da diretriz. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

Se o ponto P pertence à parábola e P' é o seu simétrico em relação ao eixo, então $d(P', F) = d(P, F)$ e $d(P', d) = d(P, d)$, logo P' também pertence à parábola. Isto significa que o que denominamos eixo é, de fato, um eixo de simetria da parábola.

Mostraremos inicialmente que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola em $\mathbb{R}^2$ cujo foco é o ponto $F = (0, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -1/4a$.

Para nos convencermos disso, verificamos primeiro que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2,$$

onde o primeiro membro é o quadrado da distância do ponto genérico $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao foco $F = (0, 1/4a)$ e o segundo membro é o quadrado da distância do mesmo ponto à reta $y = -1/4a$. Isto mostra que todo ponto do gráfico de f pertence à parábola em questão. Reciprocamente, se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer dessa parábola, o ponto $\overline{P} = (x, ax^2)$, como acabamos de ver, também pertence à parábola, logo $y = ax^2$ pois essa curva não contém dois pontos distintos com a mesma abscissa. Portanto todo ponto da parábola pertence ao gráfico de f.

Se $a > 0$, a parábola $y = ax^2$ tem a concavidade voltada para cima e seu vértice (0,0) é o ponto de menor ordenada. Se $a < 0$, a concavidade da parábola $y = ax^2$ é voltada para baixo e seu vértice (a origem) é o ponto de maior ordenada (Figura 8).

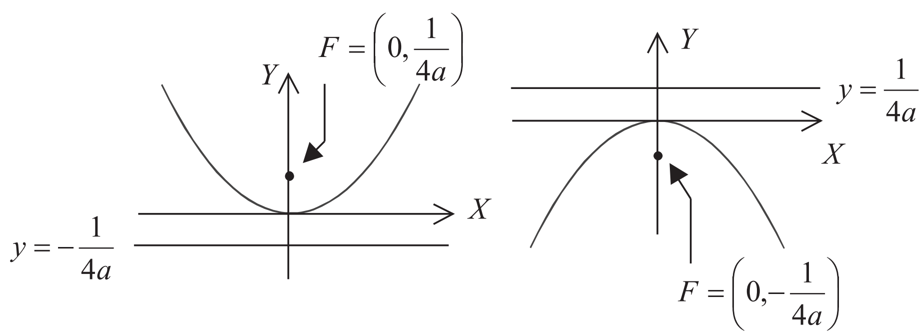

Figura 8

Em seguida, examinemos o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$. Afirmamos que ele é uma parábola, cujo foco é o ponto $F = (m, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta $y = -1/4a$ (Figura 9).

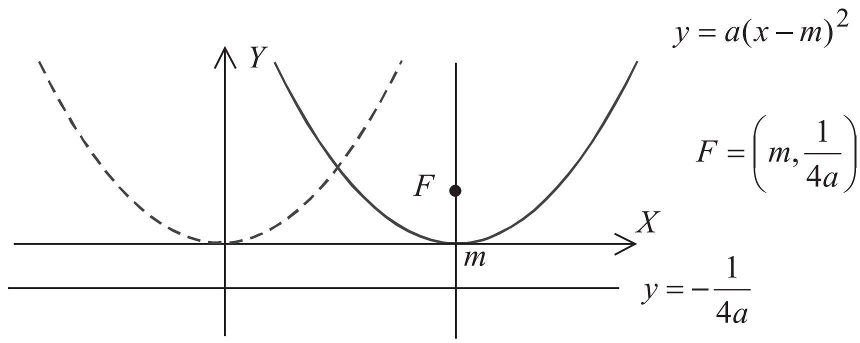

Figura 9

Para chegar a esta conclusão, tem-se duas opções. Ou se verifica que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2,$$

ou então observa-se simplesmente que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ resulta daquele de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + m, y)$, que leva o eixo vertical $x = 0$ na reta vertical $x = m$.

Finalmente, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2+k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = (m, k + 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - 1/4a$ (Figura 10).

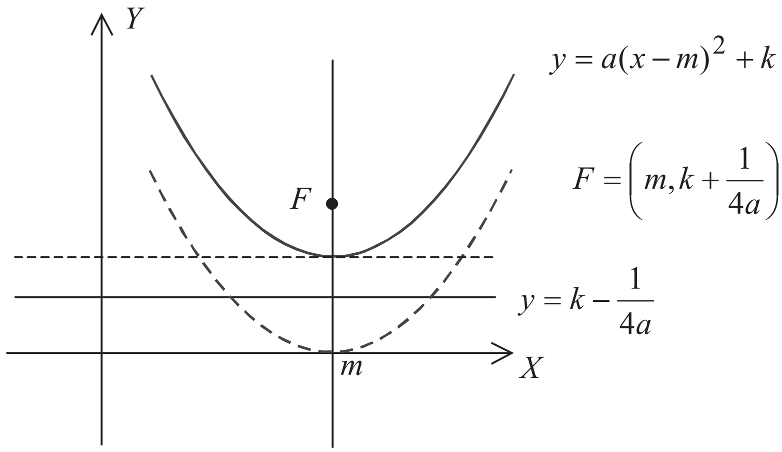

Figura 10

Com efeito, o gráfico de $y = a(x - m)^2 + k$ resulta daquele de $y = a(x - m)^2$ pela translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y + k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -1/4a$ na reta $y = k - 1/4a$.

Ora, qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita sob a forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$, onde $m = -b/2a$ e $k = f(m)$. Logo, o gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola.

Que significado gráfico têm os coeficientes a, b, c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$?

O mais óbvio é o significado de c: o valor $c = f(0)$ é a abscissa do ponto em que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta o eixo OY.

O coeficiente a mede a maior ou menor abertura da parábola. Como o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se obtém do gráfico de $g(x) = ax^2$ por uma translação horizontal seguida de uma translação vertical, portanto são figuras congruentes, basta examinar o significado de a no gráfico de $g(x) = ax^2$. Por simplicidade, suponhamos $a > 0$. Então $a < a' \Rightarrow ax^2 < a'x^2$ para todo $x \neq 0$, logo a parábola $y = a'x^2$ situa-se no interior de $y = ax^2$. Assim, quanto maior for a mais fechada será a parábola e, vice-versa, quanto menor é a mais aberta se vê a parábola. No caso de a e a' negativos, "maior" e "menor" devem ser tomados no sentido de valor absoluto (Figura 11).

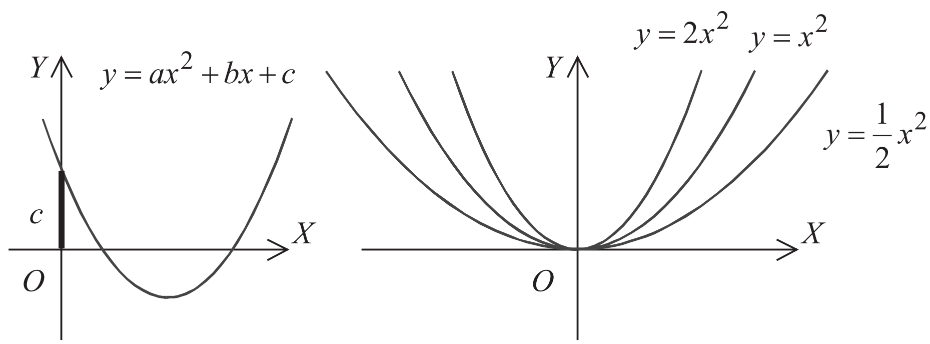

Figura 11

O coeficiente b é a inclinação da reta tangente à parábola no ponto $P = (0, c)$, interseção da parábola com o eixo y. Expliquemos e provemos esta afirmação.

Seja P um ponto de uma parábola. Uma reta que passe por P determina dois semiplanos. Diz-se que essa reta é *tangente* à parábola no ponto P quando a parábola está contida inteiramente num desses semiplanos.

A reta que passa pelo ponto $P = (0, c)$ e tem inclinação b é descrita pela equação $y = bx+c$. Os semiplanos por ela determinados são descritos pelas desigualdades $y \geq bx + c$ (semiplano superior) e $y \leq bx+c$ (semiplano inferior). Os pontos (x, y) da parábola cumprem $y = ax^2 + bx + c$ logo estão todos no semiplano superior da reta $y = bx + c$ quando $a > 0$ ou estão todos no semiplano inferior se for $a < 0$. Portanto a reta $y = bx+c$, de inclinação b, é tangente à parábola $y = ax^2 + bx + c$ no ponto $P = (0, c)$ (Figura 12).

Exemplo 11 (completando o Exemplo 10). Agora que conhecemos a forma geométrica do gráfico da função quadrática $f(x) =$

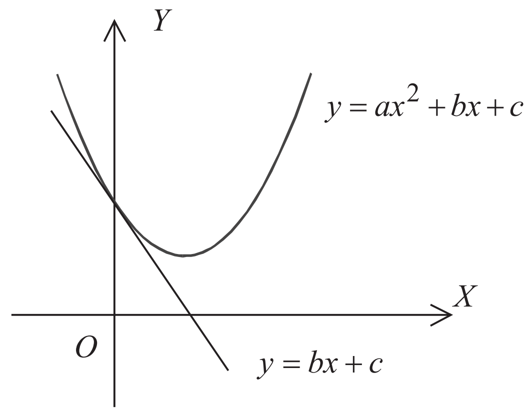

Figura 12

$ax^2 + bx + c$, podemos ver claramente que, se $a > 0$, então a função, que assume seu valor mínimo quando $x = m = -b/2a$, é decrescente à esquerda de m e crescente à direita de m. No Exemplo 10, independentemente de ser $b \leq 3a$ ou $b > 3a$, a área do paralelogramo inscrito no retângulo é sempre igual a $f(x) = 2x^2 - (a+b)x + ab$. Trata-se de achar, entre os números x tais que $0 \leq x \leq a$, aquele para o qual o valor $f(x)$ é o menor possível. Como estamos supondo $3a < b$, temos $4a < a + b$, donde $a < (a+b)/4 = m$. Assim, o intervalo $[0, a]$ está à esquerda do ponto m no qual a função quadrática assume seu mínimo. Logo f é decrescente no intervalo $[0, a]$ e, conseqüentemente, seu menor valor nesse intervalo é $f(a)$. Portanto, $x = a$ é a resposta do problema no caso em que $b > 3a$. O paralelogramo de área mínima é então aquele hachurado na Figura 13.

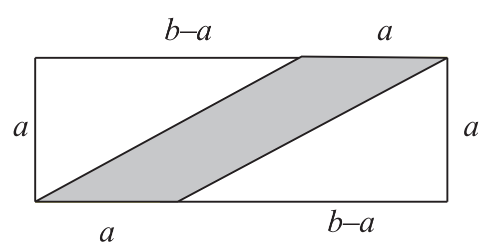

Figura 13

A reta vertical $x = -b/2a$ contém o vértice $(-b/2a, f(-b/2a))$ da parábola $y = ax^2 + bx + c$, logo é o eixo de simetria dessa curva, gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Portanto dois pontos (x', y) e (x'', y) da parábola têm a mesma ordenada, ou seja, $f(x') = f(x'')$ se, e somente se, $-b/2a$ é o ponto médio do intervalo cujos extremos são x' e x''. Noutras palavras,

$$f(x') = f(x'') \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{x' + x''}{2} \Leftrightarrow x' + x'' = -b/a.$$

Este fato pode ser verificado sem o gráfico, a partir da forma canônica $f(x) = (x - m)^2 + k$, onde $m = -b/2a$ e $k = f(m)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x') = f(x'') &\Leftrightarrow (x' - m)^2 + k = (x'' - m)^2 + k \\ &\Leftrightarrow (x' - m)^2 = (x'' - m)^2 \\ &\Leftrightarrow x' - m = \pm(x'' - m). \end{aligned}$$

Ora $x' - m = x'' - m$ equivale a $x' = x''$, enquanto $x' - m = -(x'' - m)$ equivale a $m = (x' + x'')/2$.

3 Movimento uniformemente variado

Um dos exemplos mais relevantes em que se aplicam as funções quadráticas é o movimento uniformemente variado. Aqui se tem um ponto móvel, que se desloca ao longo de um eixo. Sua posição no instante t é determinada pela abscissa $f(t)$. O que caracteriza o movimento uniformemente variado é o fato de f ser uma função quadrática, que se escreve usualmente sob a forma

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c.$$

Nesta expressão, a constante a chama-se a *aceleração*, b é a *velocidade inicial* (no instante $t = 0$) e c é a *posição inicial* do ponto.

Em qualquer movimento retilíneo, dado por uma função arbitrária $f(t)$, o quociente

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo de percurso}}$$

chama-se a *velocidade média* do ponto no intervalo cujos extremos são t e $t+h$. No caso em que $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, a velocidade média nesse intervalo é igual a $at + b + \frac{ah}{2} \cdot$ Para valores cada vez menores de h, este número vale aproximadamente $at+b$. Por isso dizemos que

$$v(t) = at + b$$

é a *velocidade* (no movimento uniformemente variado) do ponto no instante t. Quando $t = 0$, tem-se $v(0) = b$. Por isso b se chama a velocidade inicial. Além disso, para t e h quaisquer, tem-se $[v(t+h) - v(t)]/h = a$, logo a aceleração constante a é a taxa de variação da velocidade.

Um importante exemplo de movimento uniformemente variado é a queda livre de um corpo, isto é, sujeito apenas à ação da gravidade, desprezada a resistência do ar. Neste caso, a aceleração da gravidade é representada por g e seu valor, determinado experimentalmente, é $g = 9{,}81$ m/seg^2.

Se o corpo é simplesmente deixado cair de uma altura (que consideramos de coordenada zero num eixo vertical, orientado para baixo) sem ser empurrado, então sua velocidade inicial é zero e sua posição inicial é dada por $c = 0$, logo sua coordenada, após t segundos de queda, é $\frac{1}{2}gt^2 = x$. Reciprocamente, esse corpo percorre x metros em $t = \sqrt{2x/g}$ segundos.

Nosso conhecimento da função quadrática permite responder às mais diversas questões a respeito do movimento uniformemente variado. Por exemplo, se uma partícula é posta em movimento sobre um eixo a partir de um ponto de abscissa -6 com velocidade inicial de 5 m/seg e aceleração constante de -2 m/seg^2, quanto tempo se passa até sua trajetória mude de sentido e ela comece a voltar para o ponto de partida? Resposta: temos $f(t) = -t^2+5t-6$. Logo o valor máximo de f é obtido quando $t = -5(-2) = 2{,}5$ seg. Podemos ainda dizer que o ponto começa a voltar quando $v(t) = 0$. Como $v(t) = -2t + 5$ isto nos dá novamente $t = 2{,}5$ seg.

O movimento uniformemente variado pode ocorrer também no plano. Um exemplo disso é o movimento de um projétil (uma bala, uma bola, uma pedra, etc.) lançado por uma força instantânea e, a partir daí, sujeito apenas à ação da gravidade, sendo desprezada a resistência do ar (movimento no vácuo). Embora o processo ocorra no espaço tridimensional, a trajetória do projétil está contida no plano determinado pela reta vertical no ponto de partida e pela direção da velocidade inicial.

Quanto se tem um movimento retilíneo (sobre um eixo), a velocidade do móvel é expressa por um número. Mas quando o movimento ocorre no plano ou no espaço, a velocidade é expressa por um vetor (segmento de reta orientado), cujo comprimento se chama a *velocidade escalar* do móvel (tantos metros por segundo). A direção e o sentido desse vetor indicam a direção e o sentido do movimento.

No plano em que se dá o movimento, tomemos um sistema de coordenadas cuja origem é o ponto de partida do projétil e cujo eixo OY é a vertical que passa por esse ponto.

A velocidade inicial do projétil é o vetor $v = (v_1, v_2)$ cuja primeira coordenada v_1 fornece a velocidade da componente horizontal do movimento (deslocamento da sombra, ou projeção do projétil sobre o eixo horizontal OX).

Como a única força atuando sobre o projétil é a gravidade, a qual não possui componente horizontal, nenhuma força atua sobre este movimento horizontal, que é portanto um movimento uniforme. Assim, se $P = (x, y)$ é a posição do projétil no instante t, tem-se $x = v_1 t$.

Por sua vez, a aceleração (= força) da gravidade é constante, vertical, igual a $-g$. (O sinal menos se deve ao sentido da gravidade ser oposto à orientação do eixo vertical OY.) Portanto, a componente vertical do movimento de P é um movimento uniformemente acelerado sobre o eixo OY, com aceleração igual a $-g$ e velocidade inicial v_2.

Logo, em cada instante t, a ordenada y do ponto $P = (x, y)$ é dada por $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t$. (Não há termo constante porque $y = 0$ quando $t = 0$.) Veja a Figura 14.

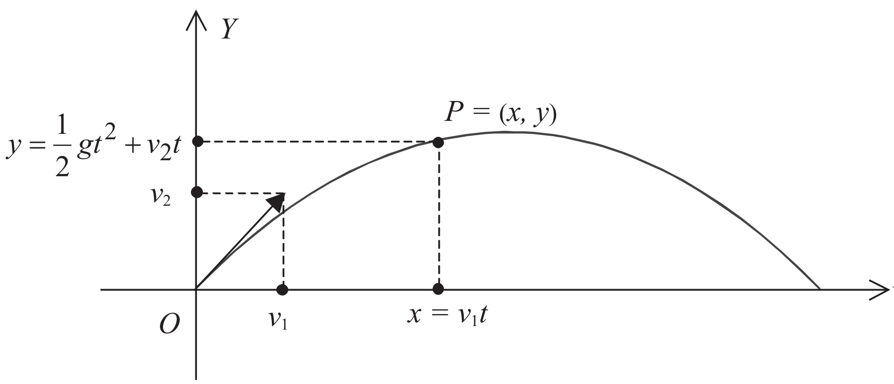

Figura 14

Se $v_1 = 0$ então, para todo t, tem-se $x = v_1 t = 0$, logo $P = (0, y)$, com

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_2 t \,.$$

Neste caso, a trajetória do projétil é vertical.

Suponhamos agora $v_1 \neq 0$. Então, de $x = v_1 t$ vem $t = x/v_1$. Substituindo t por este valor na expressão de y, obtemos

$$y = ax^2 + bx, \quad \text{onde} \quad a = -g/1v_1^2 \ \text{ e } \ b = v_2/v_1 \,.$$

Isto mostra que a trajetória do projétil é uma parábola.

4 A propriedade refletora da parábola

Outra aplicação bastante difundida da função quadrática, ou melhor, da parábola que lhe serve de gráfico, diz respeito à propriedade refletora dessa curva.

Se girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada *parabolóide de revolução*, também conhecida como *superfície parabólica*. Esta superfície possui inúmeras aplicações interessantes, todas elas decorrentes de uma propriedade geométrica da parábola, que veremos nesta seção.

A fama das superfícies parabólicas remonta à Antiguidade. Há uma lenda segundo a qual o extraordinário matemático grego

Arquimedes, que viveu em Siracusa em torno do ano 250 A.C., destruiu a frota que sitiava aquela cidade incendiando os navios com os raios de sol refletidos em espelhos parabólicos. Embora isto seja teoricamente possível, há sérias dúvidas históricas sobre a capacidade tecnológica da época para fabricar tais espelhos. Mas a lenda sobreviveu, e com ela a idéia de que ondas (de luz, de calor, de rádio ou de outra qualquer natureza), quando refletidas numa superfície parabólica, concentram-se sobre o foco, assim ampliando grandemente a intensidade do sinal recebido.

Da lenda de Arquimedes restam hoje um interessante acendedor solar de cigarros e outros artefatos que provocam ignição fazendo convergir os raios de sol para o foco de uma superfície parabólica polida.

Outros instrumentos atuam inversamente, concentrando na direção paralela ao eixo os raios de luz que emanam do foco. Como exemplos, citamos os holofotes, os faróis de automóveis e as simples lanternas de mão, que têm fontes luminosas à frente de uma superfície parabólica refletora.

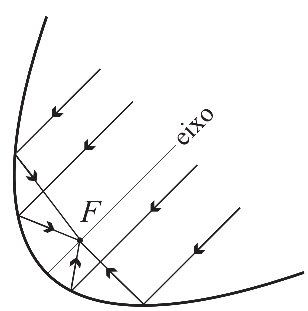

Figura 15

Um importante uso recente destas superfícies é dado pelas antenas parabólicas, empregadas na rádio-astronomia, bem como no dia-a-dia dos aparelhos de televisão, refletindo os débeis sinais provenientes de um satélite sobre sua superfície, fazendo-os convergir para um único ponto, o foco, deste modo tornando-os consideravelmente mais nítidos.

Se a antena parabólica estiver voltada para a posição (estacionária) do satélite, a grande distância fará com que os sinais por ele emitidos que atingem a antena sigam trajetórias praticamente paralelas ao eixo da superfície da antena, logo eles se refletirão na superfície e convergirão para o foco. Para a demonstração da propriedade refletora da parábola, vide o livro "A Matemática do Ensino Médio", vol. 1, páginas 135 a 141.

Problemas Propostos*

1. Se $x > 0$, mostre que $x + \frac{1}{x} \geq 2$, valendo a igualdade somente quando $x = 1$.

2. Sejam a e b números positivos. Prove que, para $x > 0$ e $y > 0$ com $xy = c$ (constante), a soma $ax + by$ assume seu valor mínimo quando $ax = by = \sqrt{abc}$.

3. Deseja-se cavar um buraco retangular com 1 m de largura de modo que o volume cavado tenha 300 m^3. Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa 10 reais e cada metro de profundidade custa 30 reais, determinar o comprimento e a profundidade do buraco a fim de que seu custo seja o menor possível.

4. Duas torneiras juntas enchem um tanque em 12 horas. Uma delas sozinha levaria 10 horas mais do que a outra para enchê-lo. Quantas horas leva cada uma das torneiras para encher esse tanque?

5. Se uma torneira enche um tanque em x horas e outra em y horas, quanto tempo levariam as duas juntas para encher esse mesmo tanque?

6. Usar a fórmula que serve de resposta ao exercício anterior para resolver o seguinte problema: Dois guindastes levam juntos 6 horas para descarregar um navio. Se os dois operassem sozinhos, um deles levaria 5 horas a menos do que o outro para efetuar a descarga. Em quanto tempo cada um dos guindastes descarregaria o navio?

7. Dois comerciantes vendem um certo tecido. O segundo vendeu 3 metros mais do que o primeiro. No fim do dia, os dois recebem juntos o total de 35 reais pela venda daquele tecido. O primeiro diz: “Se eu tivesse vendido a meu preço a quantidade que você

---

*Soluções na página 138.

vendeu, teria apurado 24 reais". O segundo responde: "E eu teria recebido R$ 12,50 pelo tecido que você vendeu". Quantos metros vendeu cada um e a que preço?

8. Mostre que a equação $m+\sqrt{x}=x$ tem uma única solução quando $m>0$ ou $m=-1/4$, tem duas soluções quando $-1/4<m\leq 0$ e nenhuma solução quando $m<-1/4$. Interprete graficamente este resultado.

9. Um professor comprou vários exemplares de um livro para presentear seus alunos, gastando 180 reais. Ganhou 3 livros a mais de bonificação e com isso cada livro ficou 3 reais mais barato. Quantos livros comprou e a que preço?

10. Quantos lados tem um polígono convexo que possui 405 diagonais?

11. Um campeonato é disputado em 2 turnos, cada clube jogando duas vezes com cada um dos outros. O total de partidas é 306. Quantos clubes estão no campeonato?

12. Um grupo de amigos, numa excursão, aluga uma van por 342 reais. Findo o passeio, três deles estavam sem dinheiro e os outros tiveram que completar o total, pagando cada um deles 19 reais a mais. Quantos eram os amigos?

13. Desprezando a resistência do ar, determinar a profundidade de um poço, sabendo que decorreram t segundos entre o instante em que se deixou cair uma pedra e o momento em que se ouviu o som do seu choque com a água no fundo. (Dar a resposta em função da aceleração da gravidade g e da velocidade do som v. Tem-se $g=9{,}8$ m/seg^2 e $v=340$ m/seg, mas estes números não precisam ser usados.)

14. Nas águas paradas de um lago, um remador rema seu barco a 12 km por hora. Num certo rio, com o mesmo barco e a mesma força nas remadas, ele percorreu 12 km a favor da corrente e 8 km contra a corrente, num tempo total de 2 horas. Qual era a velocidade do rio, quanto tempo ele levou para ir e quanto tempo para voltar?

15. Um triângulo isósceles mede 4 cm de base e 5 cm de altura. Nele deve-se inscrever outro triângulo isósceles invertido, cuja base é paralela à base do maior e cujo vértice é o ponto médio da base do primeiro. Qual é a área máxima possível do triângulo invertido? Qual a altura desse triângulo de área máxima?

16. Qual é o valor máximo (ou mínimo) das funções quadráticas $f(x) = 2(x-2)(x+3)$, $\quad g(x) = 3(2-x)(5+x)$?

17. Retiramos de um dos extremos da base b de um retângulo de altura a (com $a < b$) um segmento de comprimento x e o acrescentamos à altura. Para qual valor de x este novo retângulo tem área máxima?

18. A soma das medidas das diagonais de um losango é 8 cm. Qual o maior valor possível da área desse losango?

19. Quais são os valores possíveis para o produto de dois números reais cuja diferença é 8 ? Há um menor valor possível? Um maior?

20. Seja m o ponto onde a função quadrática f assume seu valor mínimo $k = f(m)$. Exprima algebricamente a função inversa $f^{-1}\colon [k, +\infty) \to [m, +\infty)$. Trate explicitamente o caso particular $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

21. A partir de dois vértices opostos de um retângulo de lados a, b marquemos quatro segmentos de comprimento x (Figura 16). As extremidades desses segmentos formam um paralelogramo. Para qual valor de x a área desse paralelogramo é a maior possível?

22. Quais números:

a) São pelo menos 16% maiores do que seus quadrados?

b) São no máximo 22% menores do que o quadrado de suas metades?

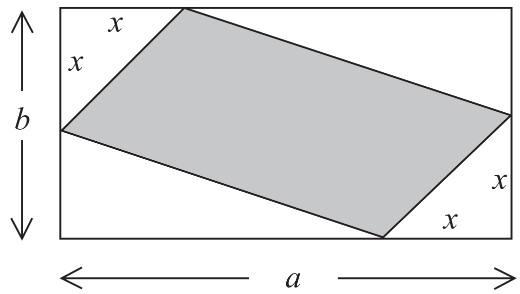

Figura 16

c) Têm o quadrado de sua metade 30% maior do que sua quinta parte?

23. Se p, q e r são inteiros ímpares, prove que a equação $px^2 + qx + r = 0$ não pode ter raiz racional.

24. Dois digitadores, A e B, se alternam na preparação de um manuscrito de 354 laudas. A trabalhou 3 horas a mais do que B. Se A tivesse trabalhado durante o mesmo tempo que B trabalhou, teria digitado 120 laudas. Se B tivesse digitado durante o mesmo tempo que A trabalhou, teria completado 252 laudas. Durante quanto tempo cada um trabalhou e quantas laudas cada um digitou?

25. De um tonel de vinho, alguém retira uma certa quantidade e a substitui por um volume igual de água. Após repetida a mesma operação, o líquido que restou no tonel é metade vinho, metade água. Quanta água foi colocada no tonel cada uma das duas vezes?

26. Qual é a função quadrática f tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$ e $f(3) = 4$?

27. A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é tal que seu gráfico tangencia o eixo das abscissas. Sabendo que $f(1) = f(3) = 2$, determine a, b e c.