Soluções dos Problemas do Capítulo 2

1. Note que $x + \dfrac{1}{x}$ é o dobro da média aritmética de x e $\dfrac{1}{x}$, logo é maior do que ou igual ao dobro da média geométrica desses números, que é igual a 1. Assim, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ para todo $x > 0$. A igualdade ocorre apenas quando $x = \dfrac{1}{x}$, ou seja, quando $x = 1$.

2. A soma $ax + by$ é o dobro da média aritmética de ax e by, logo é maior do que ou igual ao dobro da média geométrica desses números, sendo igual apenas quando $ax = by$, caso em que $ax + by = 2\sqrt{ax \cdot by} = 2\sqrt{abc}$. Este é, portanto, o menor valor de $ax + by$ quando $xy = c$. Como $ax = by$, cada um destes dois números é igual a $\sqrt{abc}$.

3. Se o comprimento procurado é x metros e a profundidade é y metros então, como a largura é 1 metro, o volume do buraco é $1 \cdot x \cdot y = 300\,\text{m}^3$. O custo da tarefa de cavar é $10x + 30y$. Trata-se, portanto, de minimizar a soma $10x + 30y$ sabendo que $xy = 300$. Pelo exercício anterior, o valor mínimo é obtido quando $10x = 30y$. Sendo $y = 300/x$, isto nos dá $10x = 30 \cdot 300/x = 9000/x$, logo $10x^2 = 9000$, $x = 30$ e $y = 300/30 = 10$. Logo o buraco deve ter 30 metros de comprimento e 10 metros de profundidade. Seu custo será de 600 reais.

4. Uma das torneiras enche o tanque em x horas e a outra em $x + 10$ horas. Em uma hora as duas torneiras juntas enchem $1/12$ do tanque, sendo $1/x$ e $1/(x + 10)$ respectivamente as frações do volume do tanque que representam a contribuição de cada uma nesse período. Logo

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 10} = \frac{1}{12}\,.$$

Eliminando os denominadores e simplificando, tem-se

$$x^2 - 14 - 120 = 0.$$

As raízes desta equação são 20 e -6. Como x não pode ser negativo, deve ser $x = 20$. Logo, uma das torneiras enche o tanque em 20 horas e a outra em $20 + 10 = 30$ horas.

5. Seja z o número de horas que as duas torneiras juntas levariam para encher o tanque. Em uma hora, a fração do tanque que as duas torneiras juntas enchem é $\frac{1}{z}$. Logo $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$ e daí $z = \frac{xy}{x+y}$. (Note que z é a metade da média harmônica de x e y.)

6. Sejam x e y respectivamente o número de horas necessárias para que cada guindaste descarregue sozinho o navio. Temos $\frac{xy}{x+y} = 6$ e $y = x + 5$, logo $\frac{x(x+5)}{2x+5} = 6$ e daí $x^2 - 7x - 30 = 0$. As raízes desta equação são 10 e -3, logo $x = 10$ e $y = 15$.

7. O primeiro comerciante vendeu x metros ao preço de p reais por metro. O segundo vendeu $x + 3$ metros a q reais cada metro. Os dados do problema se traduzem por

$$px + q(x+3) = 35, \quad (x+3)p = 24 \quad \text{e} \quad xq = 12{,}5.$$

Logo $p = 24/(x+3)$ e $q = 12{,}5/x$. Substituindo na primeira equação:

$$\frac{24x}{x+3} = \frac{12{,}5(x+3)}{x} = 35 \quad \text{ou} \quad \frac{48x}{x+3} + \frac{25(x+3)}{x} = 70.$$

Eliminando os denominadores e simplificando, recaímos na equação $x^2 - 20x + 75 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 5$ e $x_2 = 15$. Ambas as raízes servem, logo o problema admite duas respostas certas.

Primeira resposta: um dos comerciantes vendeu 5 metros a $24/(5+3) = 3$ reais o metro e o outro vendeu 8 metros a $12{,}5/5 = 2{,}50$ reais cada metro.

Segunda resposta: um dos comerciantes vendeu 15 metros a $4/3$ de reais o metro e o outro vendeu 18 metros a $5/6$ de real cada metro.

8. Escrevendo a equação dada sob a forma $\sqrt{x} = x - m$ e elevando-a ao quadrado, vemos que ela é equivalente às seguintes condições simultâneas:

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0, \quad x \geq 0, \quad x \geq m.$$

O discriminante da equação do segundo grau acima é $\Delta = 4m + 1$. Vamos separar os valores possíveis de m em cinco casos:

1º) $m < -1/4$. Então $\Delta < 0$, logo não há solução.

2º) $m = -1/4$. Então $\Delta = 0$, a equação do segundo grau acima tem apenas a raiz $x = 1/4$, que cumpre $x \geq 0$ e $x \geq m$, logo a equação $m + \sqrt{x} = x$ tem neste caso uma única solução.

3º) $-1/4 < m < 0$. Então $\Delta > 0$, logo a equação $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0$ tem duas raízes, ambas positivas (pois $2m + 1 > 0$ e $m^2 > 0$), ambas maiores do que m (pois m é negativo), logo, neste caso, a equação $m + \sqrt{x} = x$ tem duas soluções.

4º) $m = 0$. Então $\sqrt{s} = x$ tem duas soluções: $x = 0$ e $x = 1$.

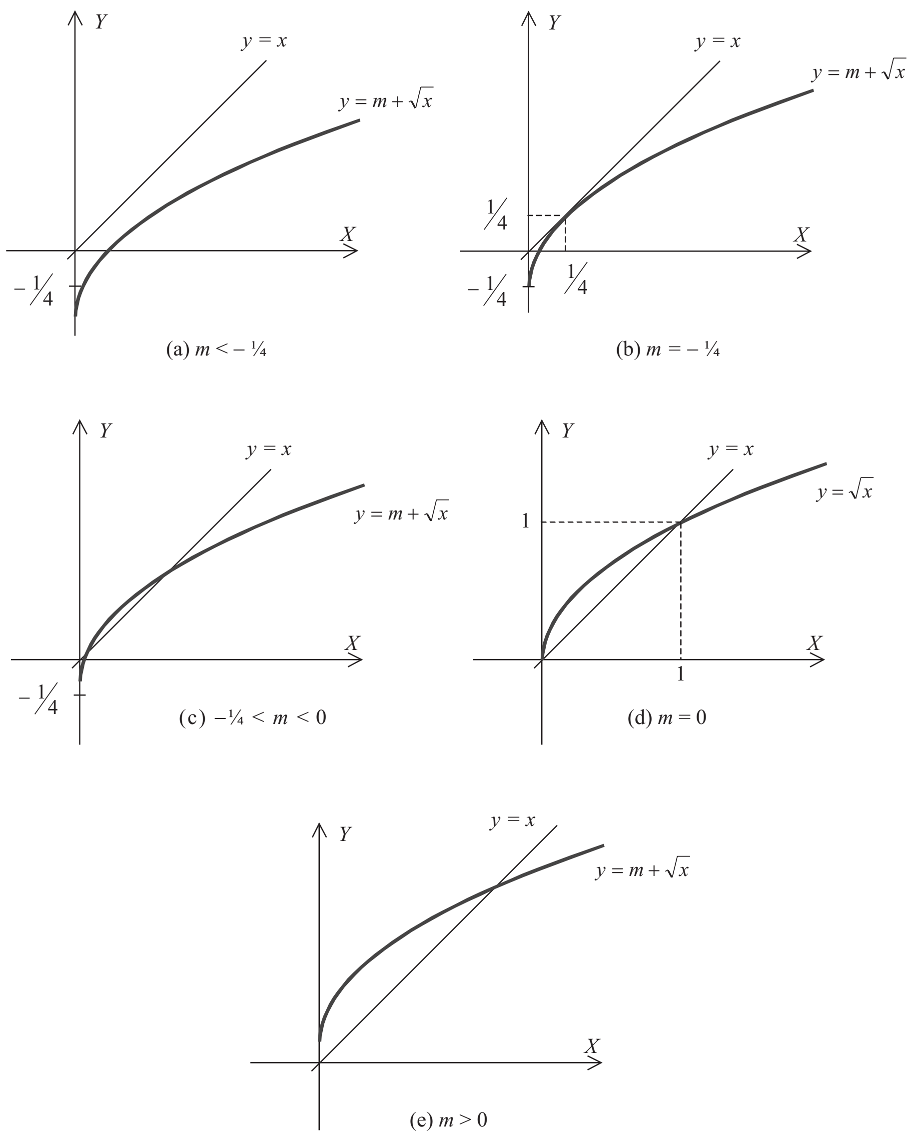
5º) $m > 0$. Então a equação $x^2-(2m+1)+m^2 = 0$ tem duas raízes distintas, ambas positivas, com produto m^2, logo apenas uma delas é maior do que m. Assim, neste caso, $m + \sqrt{x} = x$ tem uma única solução.

Geometricamente, as raízes x da equação $m + \sqrt{x} = x$ são os pontos de interseção da semi-parábola deitada $y = m+\sqrt{x}$, $x \geq 0$, com a reta $y = x$, bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes. A Figura 54 ilustra as possibilidades, conforme os valores de m.

9. O professor comprou x livros e cada um custou $180/x$ reais. Segundo o enunciado, tem-se

$$\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3.$$

Eliminando os denominadores e simplificando obtemos a equação $x^2 + 3x - 180 = 0$, cujas raízes são 12 e -15. Logo o professor comprou 12 livros a 15 reais cada um.



Y
y = x
y = m + √x
X
– 1/4
(a) m < – ¼
Y
y = x
y = m + √x
1/4
X
– 1/4
1/4
(b) m = – ¼
Y
y = x
y = m + √x
X
– 1/4
(c) −¼ < m < 0
Y
y = x
y = √x
1
X
1
(d) m = 0
y = x
Y
y = m + √x
X
(e) m > 0

Figura 54

10. O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é igual a $n(n-3)/2$. Igualando-o a 405, obtemos a equação $n^2 - 3n - 810 = 0$, cuja única raiz positiva é $n = 30$. Portanto o polígono tem 30 lados.

11. O número de jogos num campeonato disputado por n clubes em dois turnos é $n(n-1)$. Logo $n^2 - n = 306$. Resolvendo esta equação, encontramos a única raiz positiva $n = 18$.

12. Eram x amigos. Se todos pagassem, a cota de cada um seria $342/x$ reais. Como 3 não pagaram, a contribuição individual passou a ser $342/(x-3)$ reais. Segundo o enunciado do problema, tem-se $342/(x-3) = (342/x) + 19$. Eliminando os denominadores e simplificando, vemos que x é a raiz positiva da equação $x^2 - 3x - 54 = 0$, logo $x = 9$. Eram portanto 9 amigos, que deveriam pagar $342/9 = 38$ reais cada mas, no final, os 6 que pagaram contribuiram com $342/6 = 57 = 38 + 19$ reais cada um.

13. Seja x a profundidade do poço. O tempo de queda é $t' = \sqrt{2x/g}$ e o tempo que leva o som para ir do fundo do poço à altura do solo é $t'' = x/v$. Logo $t = t' + t''$ nos dá

$$t = \sqrt{2x/g} + x/v, \quad \sqrt{2x/g} = t - x/v \qquad (*)$$

Elevando $(*)$ ao quadrado, obtemos

$$\frac{2x}{g} = t^2 - \frac{2tx}{v} + \frac{x^2}{v^2}, \quad \text{ou} \quad x^2 - \frac{2v}{g}(gt+v)x + \frac{v^2gt^2}{g} = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, encontramos as raízes:

$$x = \frac{v}{g}\left[gt + v \pm \sqrt{v(v+2gt)}\right].$$

Estas raízes são ambas positivas, pois é claro que $(gt+v)^2 = (gt)^2 + 2vgt + v^2 > 2vgt + v^2 = v(v+2gt)$.

Mas a única raiz adequada para o problema é a que corresponde ao sinal $-$ antes do radical. Com efeito, se tomássemos o sinal $+$ teríamos $x > vt$, o que é absurdo pois $x = vt'' < vt$.

14. Seja x a velocidade das águas do rio em km por hora. No movimento uniforme, tem-se tempo = espaço/velocidade. Logo, somando o tempo de ida com o de volta resulta a equação

$$\frac{12}{12+x}+\frac{8}{12-x}=2, \quad \text{ou seja,} \quad x^2-2x-24=0.$$

A única raiz positiva desta equação é $x=6$. Portanto a velocidade do rio é de 6 km por hora. O remador levou 40 minutos para ir e 1 hora e 20 minutos para voltar.

15. Sejam x a altura e y a base do triângulo invertido. Por semelhança, vale $(5-x)/5 = y/4$. (Faça a figura!) Logo $y = \frac{4}{5}(5-x)$. Segue-se que a área do triângulo invertido, inscrito no maior, em função da sua altura, é expressa por $xy/2 = 2x-(1/5)x^2$. Seu valor máximo é atingido quando $x=5/2$. O triângulo maior, cuja área é $10\,\text{m}^2$, fica assim decomposto em 4 triângulos congruentes, de área igual a $(5/2)\,\text{m}^2$, um dos quais é o triângulo invertido inscrito.

16. Se α e β são as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ então a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ atinge, para $x=-b/2a=(\alpha+\beta)/2$, seu valor máximo se $a<0$ ou seu valor mínimo se $a>0$. Portanto $f(x)=2(x-2)(x+3)$ é mínimo para $x=(2-3)/2=-1/2$. Esse mínimo é $f(-1/2)=-25/2$. Analogamente, $g(x)=3(2-x)(5+x)$ assume seu valor máximo quando $x=(1-5)/2=-3/2$. Esse valor é $g(-3/2)=147/4$.

17. O novo retângulo tem base $b-x$ e altura $a+x$, logo sua área é $f(x)=(a+x)(b-x)$. As raízes da equação $f(x)=0$ são $-a$ e b. O coeficiente de x^2 em $f(x)$ é -1. Logo a função quadrática $f(x)$ assume seu valor máximo quando $x=(b-a)/2$. Note que, para este valor de x, o retângulo de base $b-x$ e altura $a+x$ é, na realidade, o quadrado de lado $(a+b)/2$.

Outro modo de resolver este problema consiste em observar que, para todo x com $0\le x\le b$, o perímetro do retângulo de base $b-x$ e altura $a+x$ é constante, logo sua área é máxima quando ele é um quadrado, ou seja, quando $b-x=a+x$, o que dá $x=(b-a)/2$.

18. As diagonais do losango são x e $8-x$ logo a área do mesmo é $x(8-x)/2 = x\left(4-\dfrac{1}{2}x\right)$ e seu valor máximo é obtido para $x=4$. Então as duas diagonais são iguais e o losango é um quadrado cujo lado mede $2\sqrt{2}$.

19. Se x é o menor dos dois números então $x+8$ é o outro e seu produto $f(x)=x(x+8)$ assume o valor mínimo $f(-4)=-16$, logo os valores possíveis desse produto formam o intervalo $[-16,+\infty)$. Não há valor máximo.

20. O enunciado do problema já indica que, se escrevêssemos a função na forma $f(x)=ax^2+bx+c$, teríamos $a>0$, logo seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima. É mais conveniente, porém, escrever $f(x)=(x-m)^2+k$. Para todo $y\geq k$, queremos achar $x\geq m$ tal que $(x-m)^2+k=y$, ou seja, $(x-m)^2=y-k$. Deve ser então $x-m=\pm\sqrt{y-k}$, logo $x=m\pm\sqrt{y-k}$. Como se deseja $x\geq m$, a solução adequada é $x=m+\sqrt{y-k}$. Portanto, a função inversa $f^{-1}\colon [k,+\infty)\to[m,+\infty)$ é dada por $f^{-1}(y)=m+\sqrt{y-k}$, onde $m=-b/2a$ e $k=f(m)$. No caso particular em que $f(x)=x^2-6x+10$, tem-se $m=3$, $k=f(3)=1$ e a inversa da função $f\colon[3,+\infty)\to[1,+\infty)$ é dada por $f^{-1}(y)=3+\sqrt{y-1}$.

21. Para fixar as idéias, suponhamos $a\leq b$. Então deve-se ter $0\leq x\leq a\leq b$. A área do paralelogramo é igual à área ab do retângulo menos a soma das áreas de 4 triângulos, logo é expressa por $f(x)=ab-(a-x)(b-x)-x^2=x(a+b-2x)$, com $0\leq x\leq a\leq b$. As raízes da equação $f(x)=0$ são $x=0$ e $x=(a+b)/2$. Logo a função f assume seu valor máximo no ponto $x=m$, onde $m=(a+b)/4$. Se tivermos $b\leq 3a$ então será $m\leq a$ e $x=m$ será a solução do problema. Se, entretanto, for $b>3a$ então a função f assume seu valor máximo no ponto $m>a$. O gráfico de f é uma parábola com a concavidade para baixo, que corta o eixo OX nos pontos de abscissas 0 e $(a+b)/2$ (esboce-o!). Como seu máximo é atingido no ponto m, que está à direita de a, a função é crescente no intervalo $[0,a]$ portanto o máximo de $f(x)$

para $0 \leq x \leq a$ é $f(a)$. Neste caso $(b > 3a)$, a resposta é $x = a$. (Desenhe o paralelogramo obtido quando $x = a$.)

22. a) Os números x que são pelo menos 16% maiores do que seus quadrados são as soluções da inequação $x \geq x^2 + 0{,}16x^2$ ou seja $1{,}16x^2 - x \leq 0$. As raízes da equação $1{,}16x^2 - x = 0$ são $x = 0$ e $x = 0{,}862$. Portanto os números procurados são todos aqueles que cumprem a condição $0 \leq x \leq 0{,}862$.

b) Os números x que são, no máximo, 22% menores do que o quadrado de suas metades são as soluções da inequação $x \leq (x/2)^2 + 0{,}22(x/2)^2$, ou seja, $1{,}22 \cdot x^2 - 4x \geq 0$. Portanto a resposta é $x \leq 0$ ou $x \geq 4/1{,}22 = 3{,}278$, ou seja, todos os números, exceto os números positivos menores do que 3,278.

c) Pedem-se os números x tais que $\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{5} + 0{,}3\,\frac{x}{5}$, ou seja, $x^2 - 1{,}04x = 0$. Logo os números procurados são $x = 0$ e $x = 0{,}961$.

23. Seja m/n racional. Se fosse $p(m/n)^2 + q(m/n) + r = 0$ teríamos $pm^2 + qmn + rn^2 = 0$. Podemos supor m/n irredutível, digamos m par e n ímpar. Como o produto de um inteiro par por qualquer outro inteiro é ainda par, pm^2 e qmn são pares, logo a soma $pm^2 + qmn$ é par. Por outro lado r e n^2 são ímpares portanto rn^2 é ímpar. Então $(pm^2 + qmn) + rn^2$, soma de um número par com um número ímpar, é ímpar, conseqüentemente $\neq 0$. Contradição. Se fosse m ímpar e n par, o argumento seria análogo: a primeira parcela da soma $pm^2 + qmn + rn^2$ seria ímpar e as duas outras pares, logo a soma não poderia ser igual a zero.

24. A trabalhou um total de $x + 3$ horas e B, x horas. O número de laudas que A digitou por hora foi $120/x$ enquanto que B digitou $252/(x + 3)$ laudas em cada hora. O total de laudas digitado por A foi $120(x + 3)/x$ e, o de B, $252x/(x + 3)$. Logo

$$\frac{120(x+3)}{x} + \frac{252x}{x+3} = 354.$$

Eliminando os denominadores e simplificando:

$$x^2 - 19x + 60 = 0.$$

Portanto, devemos ter $x = 15$ ou $x = 4$. Ambas as possibilidades são válidas: o problema admite duas respostas.

Se tomarmos $x = 15$, isto significa que A trabalhou um total de 18 horas, digitando $120/15 = 8$ laudas por hora enquanto B trabalhou durante 15 horas, digitando $252/18 = 14$ laudas por hora. Ao todo, A digitou 144 laudas e B digitou 210.

Se tomarmos $x = 4$, isto significa que A trabalhou durante 7 horas, fazendo $120/4 = 30$ laudas por hora e B trabalhou durante 4 horas, completando $252/7 = 36$ laudas por hora.

(Do ponto de vista matemático, ambas as respostas são corretas. Na prática, a primeira resposta requer habilidade mas é possível, enquanto a segunda é altamente implausível.)

25. Tomemos o vinho contido inicialmente no tonel como unidade de volume. Seja x o volume de água introduzida no tonel (igual ao volume do líquido retirado) cada vez. Então $0 \leq x \leq 1$. Após a primeira operação, o tonel continha um volume x de água, a qual admitiremos que se misturou imediatamente com o vinho formando um líquido homogêneo. Assim, o volume x do líquido retirado no início da segunda operação contém uma parte de água que é proporcional à água contida no tonel inteiro, logo são retiradas x^2 unidades de água, restando no tonel um líquido contendo $x-x^2$ unidades de água. A segunda operação se completa acrescentando mais x unidades de água. A encerrar-se a ação, o tonel contém portanto $2x - x^2$ unidades de água. O enunciado o problema diz que este é a metade do total. Portanto $2x - x^2 = 1/2$. Resolvendo esta equação, obtemos $x = 1 \pm \sqrt{2}/2$. Como deve ser $0 \leq x \leq 1$, segue-se que $x = 1 - \sqrt{2}/2 = 0{,}293$. Portanto, em cada operação a água colocada no tonel corresponde aproximadamente a 3 décimos do seu conteúdo.

26. Seja $f(x) = ax^2+bx+c$ a função procurada. Os dados $f(1) = 2$, $f(2) = 5$ e $f(3) = 4$ significam que

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ 9a + 3b + c &= 4 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, encontramos $a = -2$, $b = 9$ e $c = -5$, logo $f(x) = -2x^2 + 9x - 5$.

27. De $f(1) = f(3)$ resulta que $m = (3+1)/2 = 2$. Como o gráfico de f tangencia o eixo OX, vemos que $k = 0$, logo a função procurada é $f(x) = a(x-2)^2$. A informação $f(3) = 2$ nos dá então $a = 2$ e então $f(x) = 2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$.

Solução do problema do restaurante a quilo

Se o quilo de comida passar de 12 para $12 + x$ reais, o restaurante perderá $10x$ clientes e deixará de vender $5x$ quilos de comida. A venda diária passará a ser $100 - 5x$ quilos e a receita será de

$$(100 - 5x)(12 + x) = -5x^2 + 40x + 1200 \text{ reais.}$$

O máximo dessa função quadrática é atingido quando $x = (-40) \div (-10) = 4$. Portanto, o preço que dará a maior receita ao restaurante será de $12 + 4 = 16$ reais o quilo.