Capítulo 4

Aplicações da Trigonometria

Os livros didáticos para o ensino médio dedicam muitas páginas ao ensino da trigonometria. Entretanto, não fica claro nem para o aluno, nem para o professor, para que serve este abundante material. Vamos mostrar aqui algumas aplicações em situações reais e, para resolver os problemas, necessitaremos apenas das relações trigonométricas no triângulo retângulo, da lei dos cossenos e da lei dos senos.

Nestas aplicações estaremos calculando senos, cossenos e tangentes de ângulos e cabe aqui um esclarecimento ao leitor. Quando escrevemos por exemplo sen 30°, queremos dizer seno do ângulo cuja medida é 30°, ou seja, estamos identificando o ângulo com sua medida. Isto é prático e natural. Para ângulos agudos, estas funções trigonométricas são definidas através das tradicionais razões entre lados de um triângulo retângulo e, para qualquer ângulo obtuso x (quer dizer: ângulo cuja medida x está entre 90° e 180°), definimos $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(180^\circ - x)$ e $\cos x = -\cos(180^\circ - x)$. E isto é tudo o que precisamos.

Desde a antiguidade e até hoje, o homem sempre teve a necessidade de avaliar distâncias inacessíveis. Na verdade, são muito poucas as distâncias que podem ser medidas diretamente, com uma trena, por exemplo. Praticamente tudo que o desejamos saber sobre distâncias no mundo em que vivemos é calculado com o auxílio da trigonometria.

O problema básico, e que estará sempre presente em todas as situações, é o da resolução de um triângulo. Mas, o que significa isto? Os elementos principais de um triângulo são seus lados e seus ângulos. Resolver um triângulo significa determinar 3 desses elementos quando os outros 3 são dados (desde que não sejam os três ângulos). Este problema básico, dependendo dos dados, pode ter uma única solução, pode ser impossível ou pode ter mais de uma solução e você poderá verificar isto nos problemas que vamos discutir.

Para medir uma distância inacessível necessitaremos de uma *trena*, que nada mais é que uma fita métrica comprida que possa medir distâncias relativamente pequenas no plano horizontal e de um *teodolito*. Um teodolito é um instrumento que mede ângulos, tanto no plano horizontal quanto no plano vertical. Trata-se de uma luneta, apoiada em um tripé que pode fornecer os seguintes dados:

a) Se o observador T vê um objeto P, ele pode determinar o ângulo que a reta TP faz com o plano horizontal.

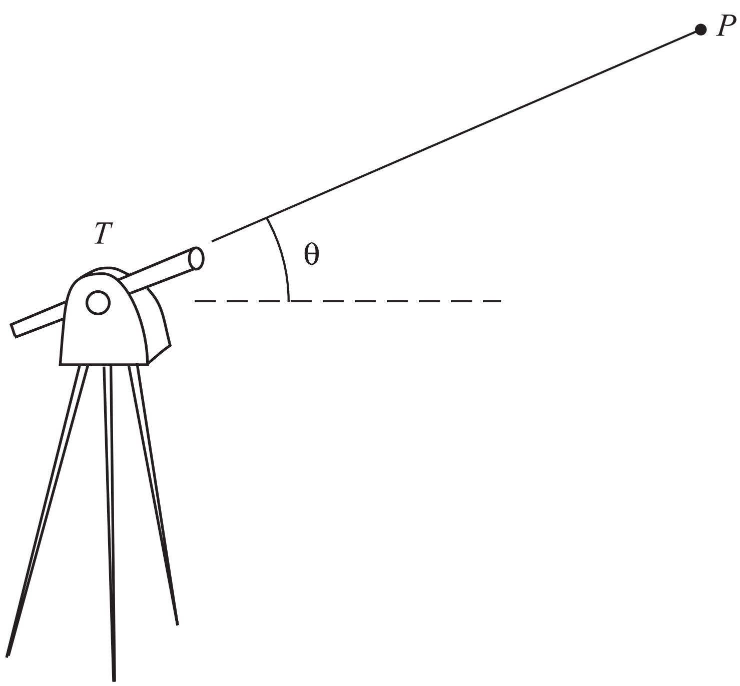

Figura 30

b) se o observador T vê um objeto A e girando a luneta vê um objeto B, ambos no plano horizontal, ele pode determinar o ângulo $A\hat{T}B$.

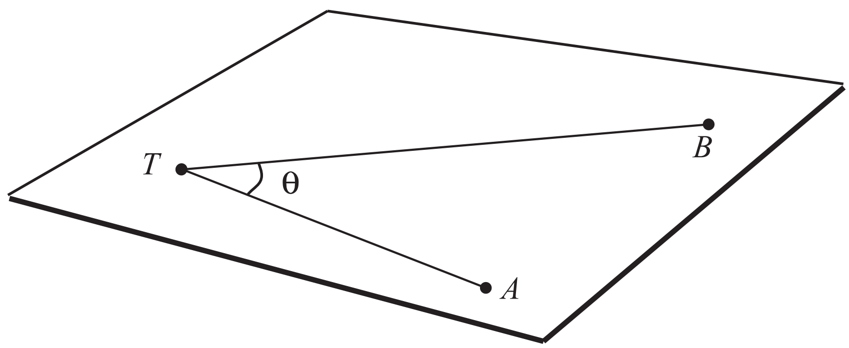

Figura 31

A trena e o teodolito são instrumentos equivalentes à régua graduada e ao transferidor quando trabalhamos no papel. A trena de hoje e a da antiguidade diferem apenas do material em que foram construídas mas essencialmente, são o mesmo instrumento. Entretanto, o teodolito de hoje é muito mais sofisticado que o equivalente antigo. E neste ponto está a diferença. Hoje, podemos medir ângulos com uma precisão muitíssimo maior do que antigamente.

Vários problemas que vamos abordar fazem referência à cidade do Rio de Janeiro. O morro do Corcovado, o morro do Pão de Açúcar, o aterro do Flamengo e sua vista à cidade de Niterói do outro lado da Baía de Guanabara forneceram situações interessantes de medidas inacessíveis. Nestes problemas as medidas são todas reais.

Problema 1. Medir a altura do Pão de Açúcar.

Medir a altura de um morro distante em relação a um plano horizontal próximo é um problema permanente em toda a história. Ele fica facilitado se o observador puder andar neste plano horizontal, em direção ao morro, uma razoável distância, o que nem sempre é possível. Mas, no caso do Pão de Açúcar o aterro do Flamengo fornece um plano horizontal especial para este objetivo.

Enunciado: Um observador está em um ponto A do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10° com o plano horizontal (medido com o teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650 m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14°. Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?

Problema 2. Medir a distância de um ponto do Rio de Janeiro a um ponto visível de Niterói.

O segundo problema importante é o de medir a distância de um ponto a outro inacessível no plano horizontal. Para calcular a distância de um ponto A (onde está o observador) a um ponto P, inacessível, é preciso que este observador possa se locomover para um ponto B no plano horizontal de onde possa também ver P.

Enunciado: De um ponto A na praia do Flamengo no Rio de Janeiro, avista-se um ponto P na praia de Icaraí em Niterói (estes dois pontos estão em lados opostos do canal de entrada da Baía de Guanabara). De um ponto B na Praia do Flamengo, distante 1 km de A também se avista o ponto P (Figura 32). Um observador no Rio de Janeiro mediu os ângulos $BAP = 119^\circ$ e $ABP = 52^\circ$. Qual é a distância entre A e P?

Problema 3. Medir a distância entre dois pontos, ambos inacessíveis.

O problema anterior resolveu o caso de medir uma distância entre um ponto (acessível) a um outro inacessível. Vamos agora tratar de medir uma distância no plano horizontal entre dois pontos inacessíveis ao observador.

Enunciado: De uma praia é possível ver duas ilhas X e Y. Um observador assinala nesta praia dois pontos A e B distantes 1 km entre si, e com seu instrumento mede os seguintes ângulos:

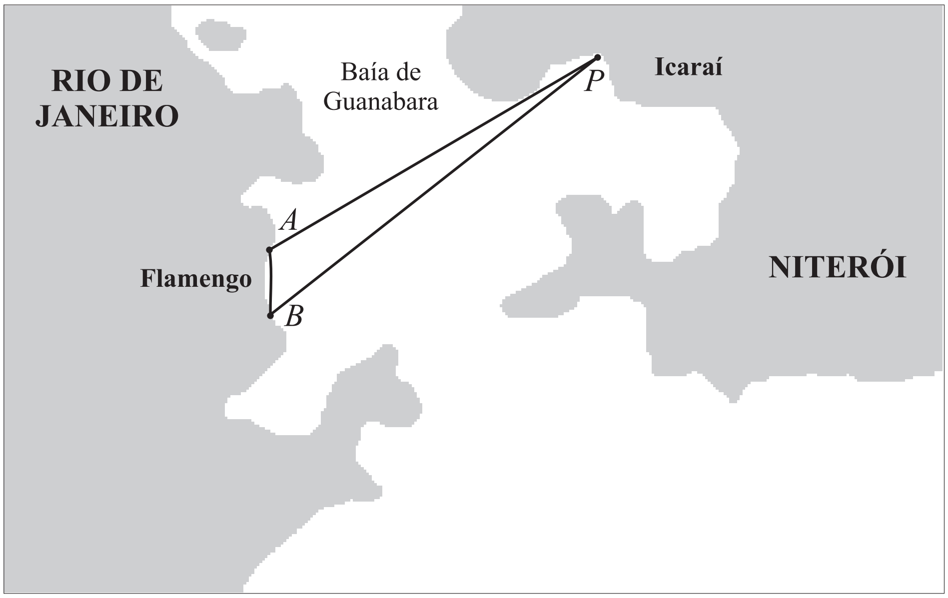

Figura 32

$XAY = 62°$, $YAB = 54°$, $ABX = 46°$ e $XBY = 74°$. Qual é a distância entre X e Y?

Problema 4. Medir o raio da Terra.

Desde a antiguidade, este problema esteve presente na cabeça dos matemáticos. Diversas soluções apareceram mas os resultados freqüentemente não eram bons pois se exigia a medida entre dois pontos muito afastados, o que era muito difícil de fazer com precisão, ou a medida de ângulos muito pequenos, o que era mais difícil ainda. Em meados do século XX já havia instrumentos que podiam medir ângulos com precisão de 1 centésimo de grau, mas hoje os instrumentos eletrônicos têm precisão inimaginável. O problema a seguir, exige apenas um instrumento relativamente antigo.

Enunciado: A montanha onde está o Cristo Redentor no Rio de Janeiro está a 703 m de altura em relação ao nível do mar. Lá de cima, um observador vê o horizonte (no mar) segundo um ângulo de $0{,}85°$ com o plano horizontal. Encontre uma medida aproximada para o raio da Terra.

Problema 5. Ainda o raio da Terra.

Uma bela tentativa de medir o raio da Terra deve-se a Eratóstenes no terceiro século antes de Cristo. Medidas foram feitas nas cidades de Assuã e Alexandria, no Egito, que estão aproximadamente no mesmo meridiano terrestre, e por rara felicidade, Assuã está quase sobre o trópico de Câncer. Isto quer fizer que no primeiro dia do verão, ao meio dia, os raios solares são perfeitamente verticais. Naquele tempo, uma unidade comum para medir distâncias grandes era o estádio. O estádio era o comprimento da pista de corrida utilizada nos jogos olímpicos da antiguidade (de 776 a 394 aC.) e era equivalente a 1/10 de milha, ou seja, aproximadamente 161 m.

Enunciado: No dia do solstício de verão, Eratóstenes verificou que, ao meio dia, o sol brilhava diretamente dentro de um poço profundo em Assuã e, em Alexandria, a 5000 estádios ao norte de Assuã, alguém mediu o ângulo que os raios solares faziam com a vertical, encontrando 1/50 do círculo. Com base nestes dados, calcule o raio da Terra.

Problema 6. O problema da corrida.

Os dados e o objetivo deste interessante problema são os seguintes. Um corredor A está sobre uma reta r e corre sobre ela no sentido AX. Um corredor B não está em r e, correndo em linha reta, pretende alcançar A (Figura 33). Sendo a partida simultânea, que direção deve tomar B se as velocidades de ambos são conhecidas?

Enunciado:

1) Considere $B\hat{A}X = 110°$, velocidade de A igual a 8 m/s e velocidade de B igual a 9 m/s. Determine o ângulo que a trajetória de B deve fazer com a reta BA para que o encontro seja possível.

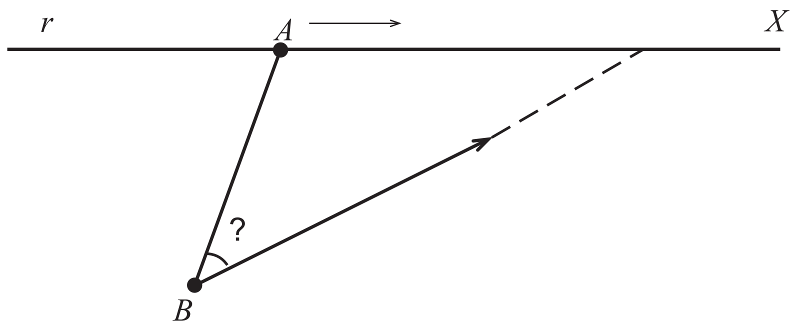

Figura 33

2) Considere $B\hat{A}X = 110°$, velocidade de A igual a $8\,\text{m/s}$, velocidade de B igual a $8{,}1\,\text{m/s}$ e $AB = 50\,\text{m}$. Sendo B um corredor inteligente, determine que distância ele percorreu até alcançar A.

Problema 7. Novamente a corrida, mas um fato muito estranho acontece.

Enunciado: Considerando ainda a Figura 33, seja $B\hat{A}X = 60°$. O corredor A tem velocidade 15% maior que a de B. Porém, o corredor B é inteligente, planejou cuidadosamente sua trajetória, e alcançou o corredor A no ponto C da reta r. Calcule o ângulo $A\hat{B}C$.

Observação: você vai encontrar dois valores para o ângulo $A\hat{B}C$. Ambos são possíveis? Por que ocorre isto?

Problemas Suplementares*

1. No problema da corrida, se os corredores A e B tiverem velocidades iguais, como B deve planejar sua trajetória?

2. No problema da corrida, $B\hat{A}X = 50°$, velocidade de $A = 9\,\text{m/s}$ e velocidade de $B = v$. Determine para que valores de v o encontro é possível.

---

*Soluções na página 155.

3. Uma estrada que está sendo construída em um plano horizontal e será formada pelos trechos retos XP, PQ e QY como mostra a Figura 34. No trecho PQ será construído um túnel para atravessar a montanha. Os engenheiros devem saber tanto em P quanto em Q, que direção devem tomar para construir o túnel AB de forma que o trecho $PABQ$ seja reto. Eles então fixaram um ponto C do plano horizontal, visível tanto de P quanto de Q e determinaram as seguintes medidas: $CP = 1{,}2\,\text{km}$, $CQ = 1{,}8\,\text{km}$ e $PCQ = 27°$. Calcule os ângulos CPQ e CQP.

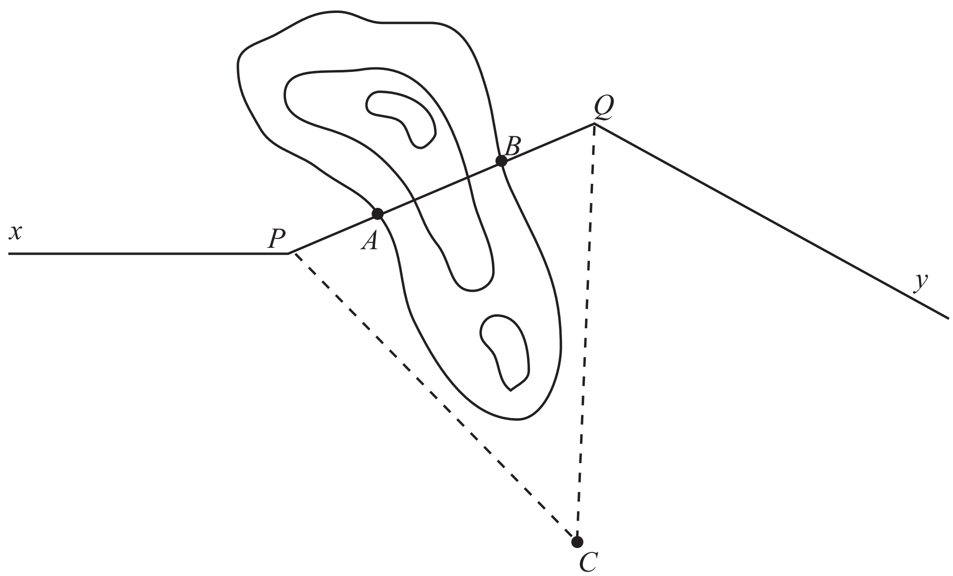

Figura 34

Para calcular a altura do morro do Corcovado no Rio de Janeiro não foi possível utilizar o método utilizado no Problema 1, quando medimos a altura do Pão de Açúcar. Não há como se aproximar do Corcovado caminhando em sua direção em um plano horizontal. Temos então que buscar uma outra solução.

4. Na Figura 35, você vê uma pequena parte do bairro do Jardim Botânico do Rio de Janeiro. Na avenida Borges de Medeiros, à beira da Lagoa Rodrigo de Freitas, e portanto quase ao nível do mar, fixamos dois pontos A e B de onde se avista o ponto C, cume do Corcovado e pé da estátua do Cristo Redentor. Sendo P a interseção da perpendicular traçada por C ao plano horizontal que contém A e B, considere os seguintes dados: $AB = 660\,\text{m}$, $CAP = 29{,}7°$, $CBP = 30{,}6°$, $PAB = 70{,}5°$, $PBA = 77{,}9°$. Calcule a altura do morro do Corcovado.

Figura 35