Disciplina: MATEMÁTICA – Área: Álgebra

Aula 4: FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU

Pré-requisitos: aula 3 – funções de primeiro grau

Também chamadas de funções quadráticas, são todas as funções que podem ser reduzidas à forma:

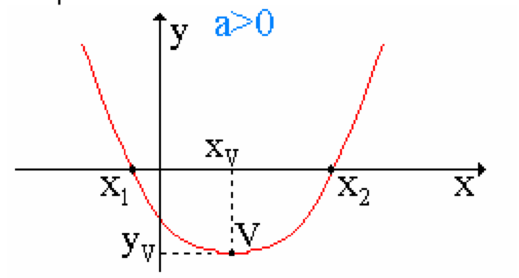
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

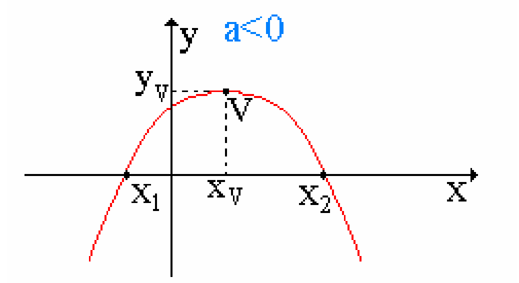
$$\forall\ a, b \text{ e } c \in R \wedge a \neq 0$$

Gráfico

O gráfico de uma função quadrática sempre será uma **parábola**, com *concavidade* voltada para cima ou para baixo. Sua construção é efetuada da mesma forma que qualquer gráfico: determinam-se pontos para a variável independente, encontra-se os respectivos valores da variável dependente, marca-os no plano cartesiano e liga-os por uma linha suave.

Se o valor de *a* na função for positivo, a função terá parábola voltada para cima; analogamente, se *a* for negativo, a parábola será para baixo:





Raízes

Fazendo-se *f(x)=0* encontramos as raízes x_1 e x_2 resolvendo a equação de segundo-grau resultante:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f(x) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obs: a parte $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamada **discriminante** da função, a apresenta algumas propriedades:

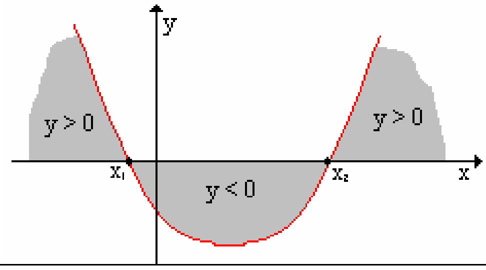
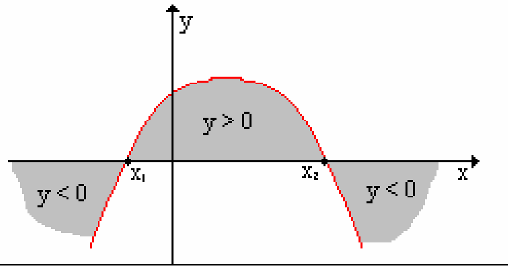
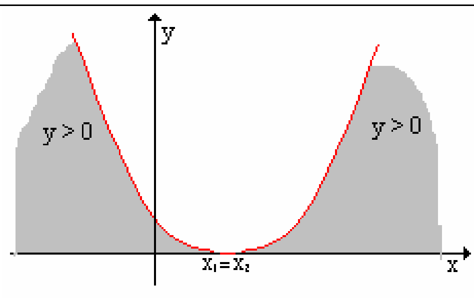
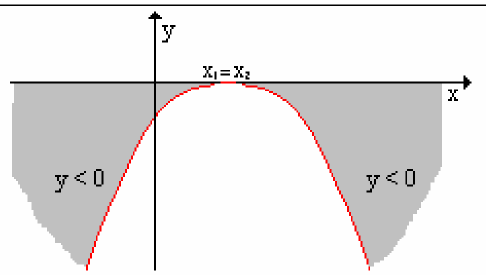
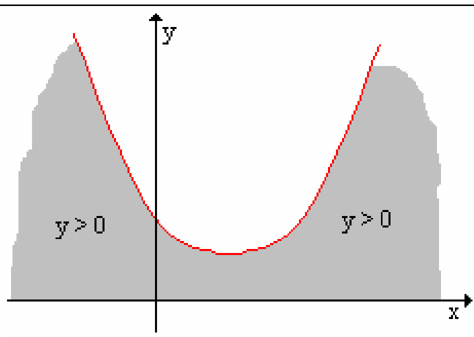
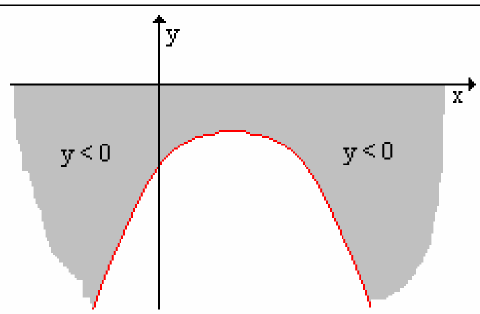
- Se $\Delta > 0$ a função possui **duas** raízes reais e **distintas**;
- Se $\Delta = 0$ a função possui **uma** raiz real (chamada de **raiz dupla**, pois na realidade são duas raízes iguais);
- Se $\Delta < 0$ a função **não** possui raízes reais.

O ponto V da figura ao lado é chamado de vértice da parábola (se *a > 0* é o ponto de mínimo da função; se *a < 0* é o ponto de máximo da função). Este é o ponto:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Sinal

O estudo dos sinais de uma função de segundo grau se faz de forma semelhante à função afim. Entretanto, dois parâmetros são importantes para o estudo do sinal: o discriminante, pois assim saberemos onde o gráfico estará, e o parâmetro *a*, pois saberemos se a parábola é para baixo ou para cima. Sempre analise esses parâmetros antes de estudar o sinal das funções de segundo grau.

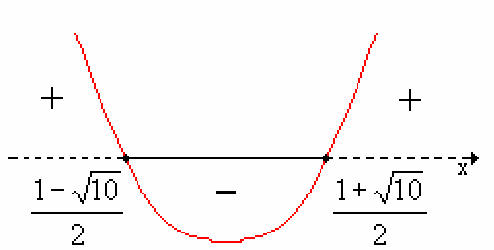
<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td align="center">quando $a > 0$
$y > 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \text{ ou } x > x_2)$
$y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$</td><td align="center">quando $a < 0$
$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
$y < 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \text{ ou } x > x_2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\Delta = 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td align="center">quando $a > 0$
$y > 0 \Leftrightarrow \forall x \neq x_1$
não existe x tal que $y < 0$</td><td align="center">quando $a < 0$
$y < 0 \Leftrightarrow \forall x \neq x_1$
não existe x tal que $y > 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\Delta < 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td align="center">quando $a > 0$
$y > 0 \Leftrightarrow \forall x$
não existe x tal que $y < 0$</td><td align="center">quando $a < 0$
$y < 0 \Leftrightarrow \forall x$
não existe x tal que $y > 0$</td></tr>
</table>

Inequações

Assim como na função afim, o estudo dos sinais auxilia na resolução de inequações do segundo grau:

Exemplo 1: resolva $3x^2 + 5x - 9 \geq x(1-x)$

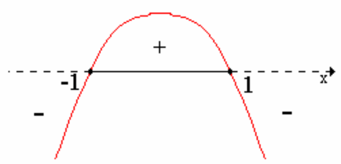
$$3x^2 + 5x - 9 \geq x(1-x)$$
$$3x^2 + 5x - 9 \geq x - x^2$$
$$4x^2 - 4x - 9 \geq 0$$
$$y = 4x^2 - 4x - 9$$
$$a = 4 > 0 \text{ (concavidade para cima)}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9) = 160 > 0$$
$$\text{raizes:}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{160}}{2 \cdot 4}$$
$$x_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{10}}{2}$$



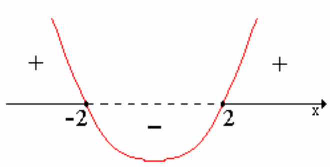
$$S = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid x \leq \frac{1-\sqrt{10}}{2} \text{ ou } x \geq \frac{1+\sqrt{10}}{2} \right\}$$

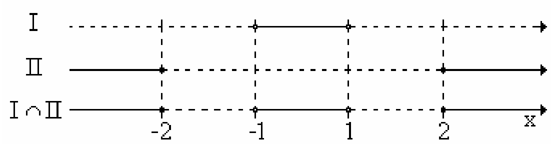
Exemplo 2: resolva $1 < x^2 \leq 4$

$$\mathrm{I}: 1 < x^2 \Rightarrow 1 - x^2 < 0$$
$$y = -x^2 + 1$$
$$a = -1 < 0 \text{ (concavidade para baixo)}$$
$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 4 > 0 \text{ (duas raízes reais)}$$
$$\text{raízes}: -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ou } x_2 = -1$$



$$\mathrm{II}: x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 0$$
$$y = x^2 - 4$$
$$a = 4 > 0 \text{ (concavidade para cima)}$$
$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 > 0 \text{ (duas raízes reais)}$$
$$\text{raízes}: x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ ou } x_2 = -2$$





$$S = \{ x \in \mathrm{R} \mid -2 \leq x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 2 \}$$

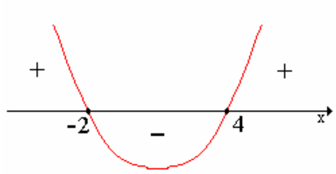
Exemplo 3: resolva $(x^2 - 2x - 8) \cdot (x^2 - 6x + 9) \geq 0$

$y_1 = x^2 - 2x - 8$

$a = 1 > 0$

$\Delta = 36$

raizes: -2 e -4

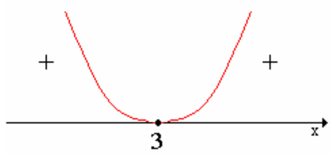


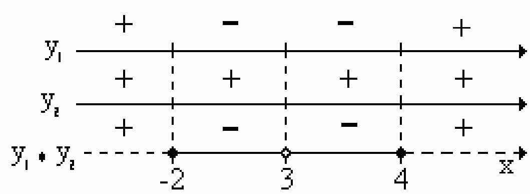
$y_2 = x^2 - 6x + 9$

$a = 1 > 0$

$\Delta = 0$

raiz: 3





$$S = \{ x \in \mathrm{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4 \}$$

BIBLIOGRAFIA:

IEZZI, Gelson e DOLCE, Oswaldo e DEGENSZAJN, David Mauro e PÉRIGO, Roberto. *Matemática: volume único*. São Paulo, Atual, 1997.