Disciplina: MATEMÁTICA – Área: Álgebra

Aula 5: FUNÇÕES MODULARES

Pré-requisitos: aula 4 – funções de segundo grau

Função definida por mais de uma expressão

Há determinados problemas da vida cotidiana em que utilizamos um tipo de função definida por mais de uma expressão matemática. Como exemplo podemos citar o modo como é cobrado o imposto de renda. Caso uma pessoa ganhe abaixo de uma certa quantia, por exemplo R$ 5.000,00, ela estará isenta da cobrança. Caso ela ganhe acima dessa quantia, uma expressão matemática definirá o valor a ser pago, por exemplo valor do imposto igual a 0,1 vezes a quantia a ser ganha mais R$ 50,00. Matematicamente ficaria assim:

$$\mathrm{I}(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \le \text{R\$ } 5.000{,}00 \\ 0{,}01x + \text{R\$ } 50{,}00, \text{ se } x > \text{R\$ } 5.000{,}00 \end{cases}$$

Módulo de um número

Chama-se módulo ou **valor absoluto** o valor definido pela distância de um número até a origem no eixo real. Assim sendo, defini-se matematicamente:

$$|x| = x, \text{ se } x \ge 0$$

ou

$$|x| = -x, \text{ se } x < 0$$

Portanto,

$$|x| \ge 0 \forall x \in \mathrm{R}$$

Exemplos:

$$|5| = 5 \qquad |-9| = -(-9) = 9$$

$$\left|-\frac{\sqrt{2}}{3}\right| = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ se } x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1 \\ -(x-1), \text{ se } x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

Função Modular

É a função caracterizada por:

$$f(x) = |x|$$

o que resulta, pela definição de módulo, em:

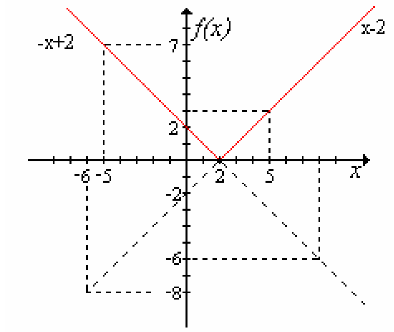
$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \ge 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Assim sendo, a função modular possui como conjunto imagem valores reais não negativos. Portanto, devemos analisar uma função modular de acordo com suas duas possibilidades, ou seja, quando a função é maior ou igual a zero e quando a função é menor que zero.

Para construir o gráfico de uma função modular basta construir os gráficos referentes às duas expressões definidas pela função e eliminar as partes negativas. Por exemplo:

$$f(x) = |x-2|$$

$$f(x) = \begin{cases} x-2, \text{ se } x \ge 2 \\ -(x-2) = -x+2, \text{ se } x < 2 \end{cases}$$



Equações Modulares

Analisando as funções modulares poderemos notar uma coisa:

$$|x| = k \Rightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$

$$\forall k \in \mathrm{R}_+$$

Com isso solucionamos as equações modulares, como no exemplo:

Exemplo 1: resolva $|5x-2| = x+3$

Da definição de módulo, temos que $|5x-2| \ge 0$. Portanto, $x+3 \ge 0 \Rightarrow x \ge -3$

$$|5x-2| = x+3 \Rightarrow \begin{cases} 5x+2 = x+3 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4} \\ \text{ou} \\ 5x+2 = -(x+3) \Rightarrow 5x+2 = -x-3 \Rightarrow 6x = -5 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Como as duas raízes encontradas satisfazem a condição de serem maiores ou iguais à –3,

$$\mathrm{S} = \left\{-\frac{5}{6}, \frac{1}{4}\right\}$$

Inequações Modulares

Derivado do conceito de módulo, temos essa propriedade:

$$|x| > k \Rightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$

$$|x| < k \Rightarrow -k < x < k$$

$$\forall k \in \mathrm{R}_+$$

Assim como nas equações, é com essa propriedade que resolvemos inequações modulares:

Exemplo 1: resolva $|x-2| > 5$

$$|x-2| > 5 \Rightarrow \begin{cases} x-2 < -5 \Rightarrow x < -3 \\ \text{ou} \\ x-2 > 5 \Rightarrow x > 7 \end{cases}$$

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 7\}$$

Exemplo 2: resolva

$$|x-4| < 9$$

$$-9 < x-4 < 9$$

$$-9+4 < x < 9+4$$

$$-5 < x < 13$$

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{R} \mid -5 < x < 13\}$$

Exemplo 3: (Retirado de IEZZI, Gelson. *Matemática, Volume Único* p. 85) Resolva:

$$|2x-1| \geq x+1$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, \text{ se } x \geq \dfrac{1}{2} \\ -2x+1, \text{ se } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nota-se que há duas possibilidades a serem analisadas de tal forma a garantir a verdade da inequação:

- Se $x \geq \frac{1}{2}$, a inequação assume a forma $2x-1 \geq x+1 \Rightarrow x \geq 2$. Aqui se nota que x deve ser maior ou igual a $\frac{1}{2}$ e também maior ou igual 2. Efetuando a interseção desses dois conjuntos, vem que:

  $$\mathrm{S}_1 = \{x \in \mathrm{R} \mid x \geq 2\}$$

- Se $x < \frac{1}{2}$, a inequação assume a forma $-2x+1 \geq x+1 \Rightarrow x \leq 0$. Assim, $x < 2$ e $x \leq 0$. Intercedendo os dois conjuntos:

  $$\mathrm{S}_1 = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leq 0\}$$

A solução vem da união dos conjuntos soluções encontrados nos dois casos:

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2 = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leq 0 \vee x \geq 2\}$$

BIBLIOGRAFIA:

IEZZI, Gelson e DOLCE, Oswaldo e DEGENSZAJN, David Mauro e PÉRIGO, Roberto. *Matemática: volume único*. São Paulo, Atual, 1997.