Funções

O que é uma função?

O próprio nome já diz. Função é uma relação entre duas grandezas na qual uma **depende** (está em função) da outra. Por exemplo, a quantidade de água que sai de uma torneira vai depender do tempo que ela permanecer aberta. Portanto a quantidade de água está em **função** do tempo.

Uma função pode ser representada através de uma fórmula. Ainda no mesmo exemplo, se da torneira vaza 20mL de água em um segundo, teremos a fórmula $Q = 20 \cdot t$ (onde Q é a quantidade de água em mL e t o tempo de vazão em segundos) regendo a vazão de água. Basta substituirmos o tempo que a torneira permaneceu aberta em t e descobriremos a quantidade de água que saiu.

Outra forma de representar uma função é através de gráfico. Veja para o nosso exemplo da torneira:

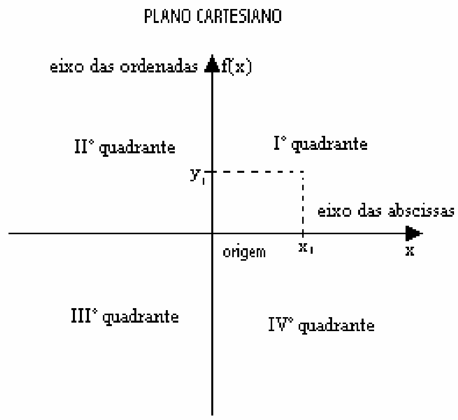
Pelo gráfico rapidamente vemos que para 2 segundos vazou 40mL de água, para 3 segundos 60mL, e assim por diante.

Domínio e Imagem

Os valores que nós variamos para encontrarmos seus correspondentes em uma função são chamados de **conjunto domínio** (no nosso exemplo, o tempo). Do mesmo modo, os valores que encontramos são chamados **conjunto imagem** (no nosso exemplo, a quantidade de água). Para cada domínio da função há **somente um** valor imagem. Em Matemática geralmente representamos o conjunto domínio pela letra **x** e o conjunto imagem por **f(x)** (nota-se que f(x) é representado pela variável **dependente**, **y=f(x)**), representando-os através da fórmula e no plano cartesiano:

$$f(x) = x \text{ ou}$$

$$y = x$$

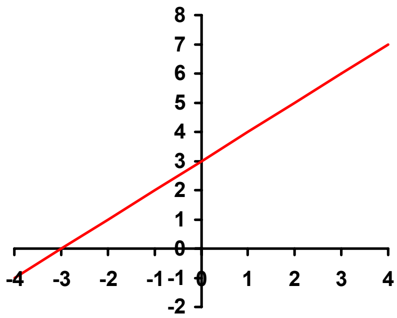


As dimensões dos conjuntos domínio e imagem dependem da função que está sendo analisada. Por exemplo:

- $f(x) = 2x + 3$ (f: R→R – domínio real e imagem real);
- $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ (f: R – {2}→R – {1} – domínio real menos o número 2 e imagem real menos o número 1).

Para criar um gráfico de uma função basta construir uma tabela com os valores do domínio (x) e seus respectivos valores imagens (y). Com esses valores estabelece-se **pares ordenados** (x,y) – o primeiro valor é sempre do domínio – e marcá-los no plano cartesiano.

Ex.:

x	f(x)=x+3	Par ordenado	Gráfico no plano cartesiano
-4	-1	(-4,-1)	
-3	0	(-3,0)	
-2	1	(-2,1)	
-1	2	(-1,2)	
0	3	(0,3)	
1	4	(1,4)	
2	5	(2,5)	
3	6	(3,6)	
4	7	(4,7)	

Função do primeiro grau (função afim)

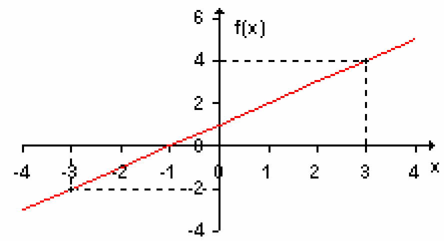
É toda função que pode ser reduzida à forma:

$$f(x) = ax + b$$

onde *a* e *b* são números reais e $a \neq 0$. O número *a* é chamado coeficiente de x e *b* é chamado termo independente.

Gráficos

O gráfico gerado por uma função do primeiro grau é sempre uma **reta.** Para construí-lo basta determinarmos dois pares ordenados e traçar uma reta cruzando os pontos determinados.



$$f(x) = x + 1$$

O coeficiente de x também é chamado *coeficiente angular* da reta e o termo independente é chamado *coeficiente linear* da reta, que é a ordenada onde a reta corta o eixo das ordenadas.

Zero ou Raiz da equação

Chama-se **zero** ou **raiz** da equação o valor de x na função $f(x) = ax + b$ quando f(x)=0. Para determinarmos basta substituirmos f(x) (ou y) por zero e resolvermos a equação. Para a função de primeiro grau encontramos uma equação de primeiro grau, como era de se esperar. A raiz da função é o ponto onde o gráfico corta o eixo das abscissas.

Crescimento, decrescimento e sinal de uma função do primeiro grau

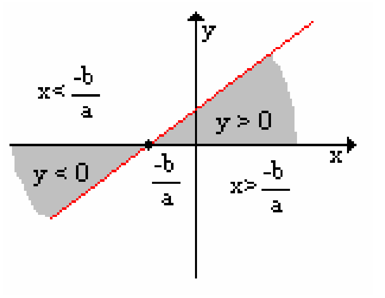
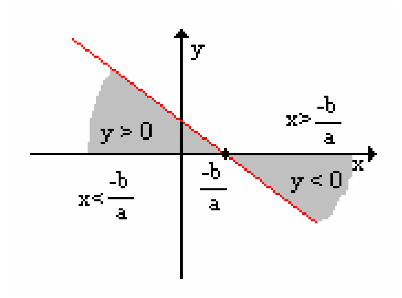
Seja a função $y = f(x) = ax + b$:

- Se ao aumentarmos o valor de x e seus correspondentes valores de y também aumentarem teremos uma **função crescente**. Neste caso, $a > 0$.
- Se ao aumentarmos o valor de x e seus correspondentes valores de Y diminuírem teremos uma **função decrescente**. Neste caso, $a < 0$.

Com isso podemos determinar os **sinais** da função, ou seja, os valores de x onde y > 0, y < 0 e y = 0.
Para determinarmos y = 0 temos:

$$y = ax + b$$
$$0 = ax + b$$
$$ax = -b$$
$$\boldsymbol{x = \frac{-b}{a}}$$

Note que isso independe do valor de *a*.
Agora,

<table>
<tr><td colspan="2">se $a > 0$</td><td colspan="2">se $a < 0$</td></tr>
<tr><td>$y > 0$
$\boldsymbol{x > \frac{-b}{a}}$</td><td rowspan="2"></td><td>$y > 0$
$\boldsymbol{x < \frac{-b}{a}}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$y < 0$
$\boldsymbol{x < \frac{-b}{a}}$</td><td>$y < 0$
$-ax + b < 0$
$\boldsymbol{x > \frac{-b}{a}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se a é maior que zero, os valores de y aumentam conforme aumenta x (função crescente)</td><td colspan="2">Se a é menor que zero, os valores de y diminuem conforme aumenta x (função decrescente).</td></tr>
</table>

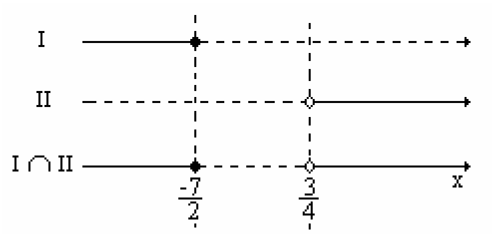
Atenção! Estude! Caso você deixou de compreender alguma coisa vista até agora, releia e pesquise em livros. Os próximos assuntos dependem dos conceitos já abordados.

Inequações

O estudo dos sinais da função são de enorme utilidade na resolução de inequações. Acompanhe os exemplos:

1º:
$$-2x - 9 > 3 \Rightarrow -2x > 3 + 9 \Rightarrow -2x > 12 \Rightarrow 2x < -12 \Rightarrow x < -6$$
$$\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{R} \mid x < -6\}$$

2º:
$$2x \le 4x + 7 < 10$$
$$\mathrm{I}: 2x \le 4x + 7 \Rightarrow 2x - 4x \le 7$$
$$-2x \le 7 \Rightarrow 2x \ge -7 \Rightarrow x \ge -\frac{7}{2}$$
$$\mathrm{II}: 4x + 7 < 10 \Rightarrow 4x < 10 - 7 \Rightarrow 4x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{4}$$



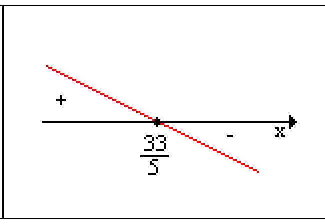
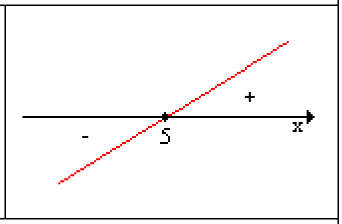
$$\mathrm{S} = \left\{x \in \mathrm{R} \mid -\frac{7}{2} \le x < \frac{3}{4}\right\}$$

3º: Para resolução de inequações compostas por multiplicação e/ou divisão de expressões com incógnita nos dois fatores e/ou numerador e denominador:

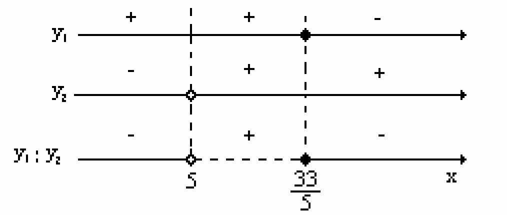
- Isole todos os termos no primeiro membro:

$$\frac{x+3}{x-5} \geq 6 \Rightarrow \frac{x+3}{x-5} - 6 \geq 0 \Rightarrow \frac{x+3-6(x-5)}{x-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{-5x+33}{x-5} \geq 0$$

- Divide a inequação em duas funções que componham a multiplicação ou divisão e estude o sinal delas:

$y_1 = -5x+33$		$y_2 = x-5$	
$a = -5 < 0$ (função decrescente) raiz $= -\frac{b}{a} = \frac{33}{5}$		$a = 1 > 0$ (função crescente) raiz $= -\frac{b}{a} = 5$	
$y > 0 \Rightarrow x < \frac{33}{5}$ $y < 0 \Rightarrow x > \frac{33}{5}$		$y > 0 \Rightarrow x > 5$ $y < 0 \Rightarrow x < 5$	

- Efetue a multiplicação ou divisão através do estudo dos sinais e satisfaça a condição da inequação (pede valores maiores ou iguais a zero ou menores ou iguais a zero?):



$$S = \left\{ x \in R \mid 5 < x \leq \frac{33}{5} \right\}$$

Função do segundo grau (função quadrática)

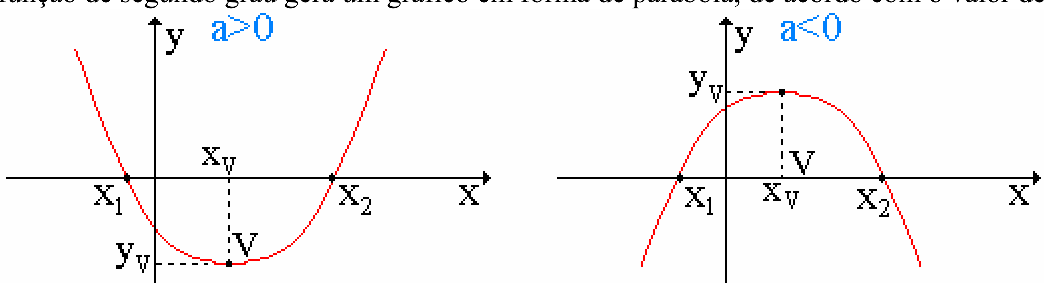
É toda função que pode ser reduzida à forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde a, b e c são reais e $a \neq 0$.

Gráficos

A função de segundo grau gera um gráfico em forma de parábola, de acordo com o valor de a:



Raízes

Da mesma forma que na função afim, para encontrarmos as raízes de uma função quadrática fazemos $f(x) = 0$. Depois basta resolver a equação de segundo grau resultante através da fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obs: a parte $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado **discriminante** da função, a apresenta algumas propriedades:

- Se $\Delta > 0$ a função possui **duas** raízes reais e **distintas**;

- Se $\Delta = 0$ a função possui **uma** raiz real (chamada de **raiz dupla**, pois na realidade são duas raízes iguais);
- Se $\Delta < 0$ a função **não** possui raízes reais.

Construção da parábola

Para construir a parábola primeiramente deve-se determinar o par ordenado que localizam o ponto V do vértice da parábola (veja a figura na seção *Gráficos*) através das fórmulas:

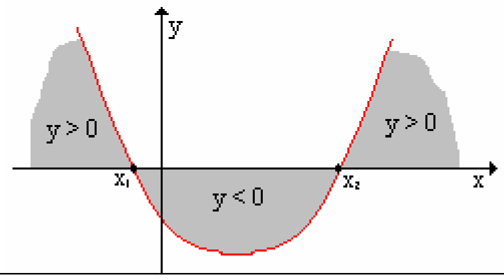
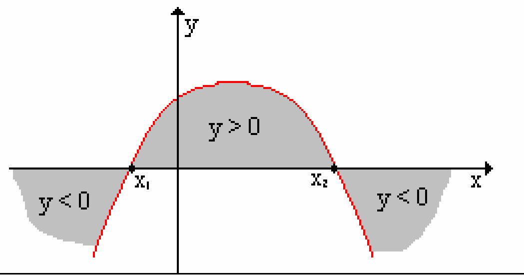
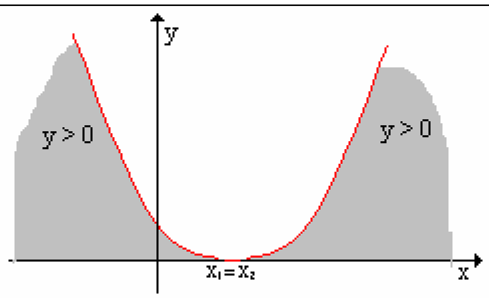
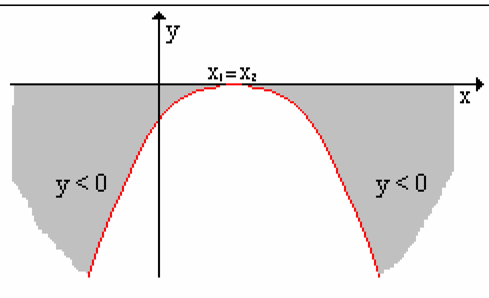
$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

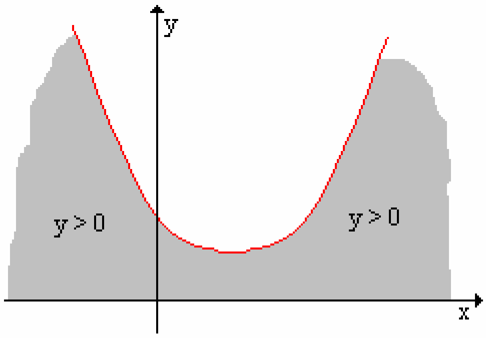
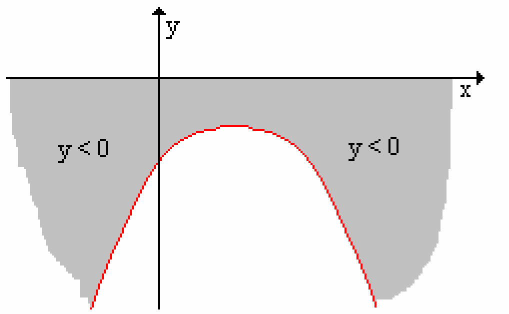
(lembre-se que o primeiro valor corresponde à coordenada ***x*** e o segundo à coordenada ***y***!)

Depois determine as raízes (ou a raiz para funções $\Delta = 0$) e mais dois pontos, substituindo y por qualquer valor conveniente e encontrando suas coordenadas x. Trace uma parábola passando pelos pontos encontrados (assim como na figura da seção *Gráficos*). Se $\Delta < 0$ não haverá raízes, portanto basta substituir y por um valor qualquer que seja conveniente, encontrar suas coordenadas x e depois traçar o gráfico da mesma forma.

Sinal

O estudo dos sinais de uma função de segundo grau se faz de forma semelhante à função afim. Veja:

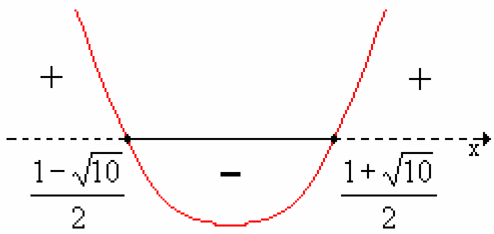
<table>
<tr><td colspan="2">$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>quando $a > 0$
$y > 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \text{ ou } x > x_2)$
$y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$</td><td>quando $a < 0$
$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
$y < 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \text{ ou } x > x_2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>quando $a > 0$
$y > 0 \Leftrightarrow \forall x \neq x_1$
não existe x tal que $y < 0$</td><td>quando $a < 0$
$y < 0 \Leftrightarrow \forall x \neq x_1$
não existe x tal que $y > 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta < 0$</td></tr>
</table>

	
quando $a > 0$ $y > 0 \Leftrightarrow \forall x$ não existe x tal que $y < 0$	quando $a < 0$ $y < 0 \Leftrightarrow \forall x$ não existe x tal que $y > 0$

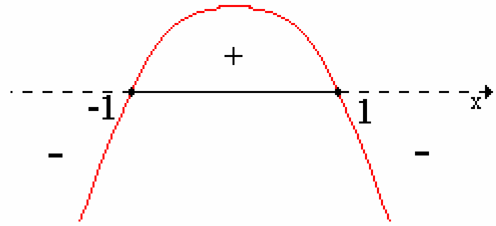
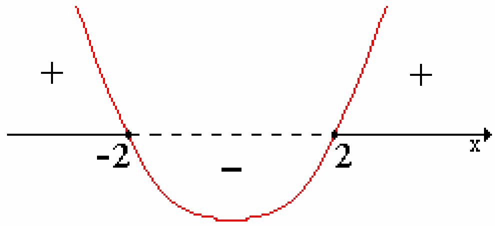
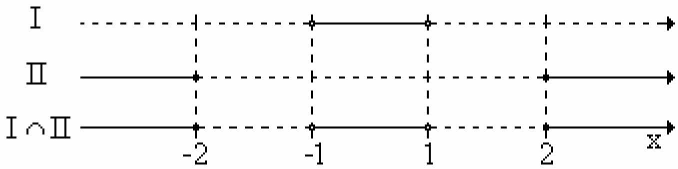
Inequações

Assim como na função afim, o estudo dos sinais auxilia na resolução de inequações do segundo grau:

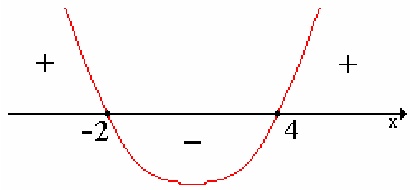
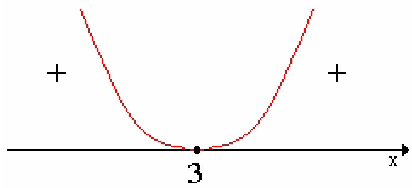
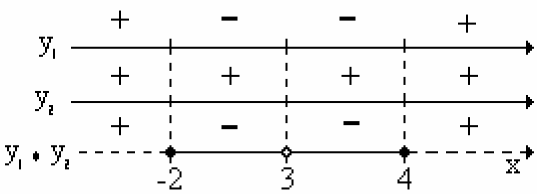
1º

$3x^2 + 5x - 9 \geq x(1-x)$ $3x^2 + 5x - 9 \geq x - x^2$ $4x^2 - 4x - 9 \geq 0$ $y = 4x^2 - 4x - 9$ $a = 4 > 0$ (concavidade para cima) $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9) = 160 > 0$ (duas raízes reais) raizes : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{160}}{2 \cdot 4}$ $x_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{10}}{2}$	
$S = \left\{ x \in R \mid x \leq \frac{1-\sqrt{10}}{2} \text{ ou } x \geq \frac{1+\sqrt{10}}{2} \right\}$	

2º: $1 < x^2 \leq 4$

$\mathrm{I}: 1 < x^2 \Rightarrow 1 - x^2 < 0$ $y = -x^2 + 1$ $a = -1 < 0$ (concavidade para baixo) $\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 4 > 0$ (duas raízes reais) raízes: $-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ ou $x_2 = -1$	
$\mathrm{II}: x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 0$ $y = x^2 - 4$ $a = 4 > 0$ (concavidade para cima) $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 > 0$ (duas raízes reais) raízes: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ou $x_2 = -2$	
	
$S = \{x \in R \mid -2 \leq x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 2\}$	

3º: $(x^2 - 2x - 8) \cdot (x^2 - 6x + 9) \geq 0$

$y_1 = x^2 - 2x - 8$ $a = 1 > 0$ $\Delta = 36$ raizes: -2 e -4	
$y_2 = x^2 - 6x + 9$ $a = 1 > 0$ $\Delta = 0$ raiz: 3	
	
$S = \{x \in R \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$	

Função Modular

Função definida por mais de uma expressão

Há determinados problemas da vida cotidiana em que utilizamos um tipo de função definida por mais de uma expressão matemática. Como exemplo podemos citar o modo como é cobrado o imposto de renda. Caso uma pessoa ganhe abaixo de uma certa quantia, por exemplo R$ 5.000,00, ela estará isenta da cobrança. Caso ela ganhe acima dessa quantia, uma expressão matemática definirá o valor a ser pago, por exemplo valor do imposto igual a 0,1 vezes a quantia a ser ganha mais R$ 50,00. Matematicamente ficaria assim:

$$\mathrm{I}(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq \text{R\$ } 5.000{,}00 \\ 0{,}01x + \text{R\$ } 50{,}00, \text{ se } x > \text{R\$ } 5.000{,}00 \end{cases}$$

A Matemática é uma ciência que só se aprende exercendo o raciocínio. Portanto, estude e principalmente exercite a matéria, pois do contrário é praticamente impossível aprende-la. Comece a exercitar seu raciocínio agora! Como ficaria o gráfico de uma função definida por mais de uma expressão?

Módulo de um número

Chama-se módulo ou **valor absoluto** o valor definido pela distância de um número até a origem no eixo real. Assim sendo, defini-se matematicamente:

$$|x| = x, \text{ se } x \geq 0$$

ou

$$|x| = -x, \text{ se } x < 0$$

Portanto,

$$|x| \geq 0 \forall x \in \mathrm{R}$$

Exemplos:

$$|5| = 5 \quad |-9| = -(-9) = 9 \quad \left|-\frac{\sqrt{2}}{3}\right| = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ se } x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ -(x-1), \text{ se } x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

Função Modular

É a função caracterizada por:

$$f(x) = |x|$$

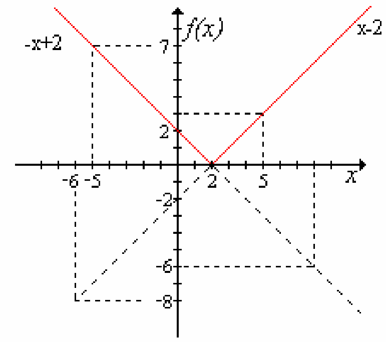
o que resulta, pela definição de módulo, em:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Assim sendo, a função modular possui como conjunto imagem valores reais não negativos. Portanto, devemos analisar uma função modular de acordo com suas duas possibilidades, ou seja, quando a função é maior ou igual a zero e quando a função é menor que zero.

Para construir o gráfico de uma função modular basta construir os gráficos referentes às duas expressões definidas pela função e eliminar as partes negativas. Por exemplo:

$$f(x) = |x-2| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-2, \text{ se } x \geq 2 \\ -(x-2) = -x+2, \text{ se } x < 2 \end{cases}$$



Equações Modulares
Analisando as funções modulares poderemos notar uma coisa:

$$|x| = k \Rightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$

$$\forall k \in \mathrm{R}_+$$

Com isso solucionamos as equações modulares, como no exemplo:

$$|5x - 2| = x + 3$$

Da definição de módulo, temos que $|5x - 2| \geq 0$. Portanto, $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$$|5x-2| = x+3 \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2 = x + 3 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4} \\ \text{ou} \\ 5x + 2 = -(x+3) \Rightarrow 5x + 2 = -x - 3 \Rightarrow 6x = -5 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Como as duas raízes encontradas satisfazem a condição de serem maiores ou iguais à –3,

$$\mathrm{S} = \left\{-\frac{5}{6}, \frac{1}{4}\right\}$$

Inequações Modulares
Derivado do conceito de módulo, temos essa propriedade:

$$|x| > k \Rightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$

$$|x| < k \Rightarrow -k < x < k$$

$$\forall k \in \mathrm{R}_+$$

Assim como nas equações, é com essa propriedade que resolvemos inequações modulares:
1º

$$|x-2| > 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 < -5 \Rightarrow x < -3 \\ \text{ou} \\ x - 2 > 5 \Rightarrow x > 7 \end{cases}$$

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 7\}$$

2º

$$|x-4| < 9 \Rightarrow \{-9 < x - 4 < 9 \Rightarrow -9 + 4 < x < 9 \Rightarrow -5 < x < 9$$

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{R} \mid -5 < x < 9\}$$

3º (Retirado de IEZZI, Gelson. *Matemática, Volume Único* p. 85)

$$|2x-1| \geq x+1$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \\ -2x+1, \text{se } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nota-se que há duas possibilidades a serem analisadas de tal forma a garantir a verdade da inequação:

- Se $x \geq \frac{1}{2}$, a inequação assume a forma $2x-1 \leq x+1 \Rightarrow x \geq 2$. Aqui se nota que x deve ser maior ou igual a $\frac{1}{2}$ e também maior ou igual 2. Efetuando a interseção desses dois conjuntos, vem que:

$$\mathrm{S}_1 = \{x \in \mathrm{R} \mid x \geq 2\}$$

- Se $x < \frac{1}{2}$, a inequação assume a forma $-2x+1 \leq x+15 \Rightarrow x \leq 0$. Assim, $x < 2$ e $x \geq -\frac{1}{3}$. Intercedendo os dois conjuntos:

$$\mathrm{S}_1 = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leq 0\}$$

A solução vem da união dos conjuntos soluções encontrados nos dois casos:

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2 = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$$

Pesquise e estude. Faça exercícios. Apenas com empenho se aprende Matemática!

Função exponencial

Potência

Chama-se **potência** ao produto de um número por ele mesmo, independente do número de vezes que esse produto ocorra. Matematicamente, seja a um número real e n um número natural:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ (n vezes)}$$

Assim, tem-se:

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \qquad 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \qquad \left(\sqrt{10}\right)^2 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{100} = 10$$

Convencionou-se:

- Qualquer número não nulo elevado a 1 é igual a ele mesmo:

$$a^1 = a \qquad 128^1 = 128 \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1^1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

- Qualquer número não nulo elevado a 0 é igual a 1:

$$a^0 = 1 \qquad 46^0 = 1 \qquad \sqrt{3^0} = \sqrt{1} = 1$$

Expoentes não naturais

- Se o expoente for negativo, o número é o inverso da potência caso fosse positiva:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ex:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 1 \cdot \frac{64}{1} = 64$$

- Se o expoente for racional, o denominador se torna o índice de um radical e o numerador a potência do radicando:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Ex:

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5} \qquad 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

Lembre-se que:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad n \in \mathrm{N}^*$$

Ex:

$$\sqrt[4]{16} = 2 \Leftrightarrow 2^4 = 16 \qquad \sqrt[3]{-27} = -3 \Leftrightarrow (-3)^3 = -27$$

<u>Propriedades</u>

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Devido às potências de expoente fracionário, temos as seguintes propriedades:

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
2. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Função exponencial

É toda função que a incógnita se encontra como expoente de um termo.

$$f(x) = a^x$$

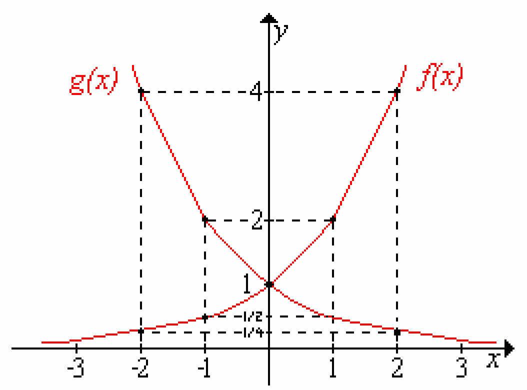
$$\forall a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Gráficos

Construiremos os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. As outras funções exponenciais possuirão gráficos semelhantes.

x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
-2	$\frac{1}{4}$	4	
-1	$\frac{1}{2}$	2	
0	1	1	

1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$



Desses gráficos extraímos algumas propriedades:

1. O gráfico sempre cortará o eixo das ordenadas no ponto (0,1) pois:
$$x = 0 \Rightarrow f(x) = a^0 = 1$$
2. Se $x > 1$, a função será crescente.
3. Se $0 < x < 1$, a função será decrescente.
4. $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$
5. O conjunto imagem será sempre positivo, pois $a > 0$, e nunca chegará a 0, pois $a \neq 0$.

Equações exponenciais

São equações que apresentam a incógnita como expoente de uma potência. Para resolve-la reduzimos, quando possível, a equação a membros de potência de mesma base e aplicarmos a quarta propriedade das funções exponenciais ($a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$). Veja os exemplos:

$$3^{x+2} = 27 \Rightarrow 3^x \cdot 3^2 = 3^3 \Rightarrow 3^x = \frac{3^3}{3^2} \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \{1\}$$

$$4^x - 2^x - 2 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 2^x - 2 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0 \text{ (faz-se } 2^x = y)$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -1$$

$$2^x = y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$2^x = y \Rightarrow y = -1 \Rightarrow 2^x = -1 \text{ não existe } x$$

$$S = \{1\}$$

Inequações exponenciais

Resolve-se inequações exponenciais de forma semelhante às equações. Entretanto aplica-se as seguintes propriedades, decorrentes das segunda e terceira propriedades das funções exponenciais:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2 \text{ (se } a > 1 \text{ - função crescente)}$$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2 \text{ (se } 0 < a < 1 \text{ - função decrescente)}$$

Exemplos:

$$2^{x+1} > 4 \Rightarrow 2^{x+1} > 2^2 \Rightarrow x + 1 > 2 \Rightarrow x > 1$$

$$S = \{x \in R \mid x > 1\}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > 3 \Rightarrow \left(3^{-1}\right)^{2x} > 3 \Rightarrow 3^{-2x} > 3 \Rightarrow -2x < 1 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ x \in R \mid x < -\frac{1}{2} \right\}$$

Função Logarítmica

Definição

O conceito de **logaritmo** surgiu para solucionar o maior problema das funções exponenciais: resolver equações que não sejam possíveis reduzir as potências a bases iguais. Mais adiante veremos isso. Por enquanto, veja a definição:

- Chama-se **logaritmo** de b na base a, sendo a e b reais e positivos e $a \neq 1$, o número tal que seja o índice (x) de uma potência de base a que tenha como resultado o número b. Ou seja,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

- a é a base do logaritmo, b o logaritmando e x o logaritmo.

Por exemplo:

$\log_3 9 = 2 \Rightarrow 3^2 = 9$ $\qquad$ $\log_5 125 = 3 \Rightarrow 5^3 = 125$ $\qquad$ $\log_{\sqrt{10}} 10 = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$

Dessa forma, temos as seguintes conseqüências do logaritmo:

1. $\log_a 1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1$
2. $\log_a a = 1 \Rightarrow a^1 = a$
3. $a^{\log_a b} = b \Rightarrow \log_a b$ é o expoente que se deve colocar na base a para termos b.
4. $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$

Há dois logaritmos especiais, usados principalmente na área da Engenharia:

- *Sistema de logaritmos decimais*: são os logaritmos cuja base é 10. Neste caso pode-se omitir a base na escrita:

$$\log b = \log_{10} b$$

- *Sistema de logaritmos neperianos*: são os logaritmos cuja base é e, um número irracional próximo de 2,71828... (como o π!). Neste caso pode-se substituir o símbolo $\log_e$ por ℓn:

$$\log_e x = \ell n\, x$$

Propriedades operativas dos logaritmos

1. $\log_a (b \cdot c \cdot d \cdot \ldots \cdot n) = \log_a b + \log_a c + \log_a d + \ldots + \log_a n$
2. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$

Essas propriedades são extremamente importantes para a determinação de logaritmos, exemplo:

Sabendo que $\log 2 \cong 0{,}301$ quanto vale $\log 200$?

$\log 200 = \log(2 \cdot 100) = \log 2 + \log 100 \cong 0{,}301 + 2 \cong 2{,}301$

Mudança de base

Pode-se mudar a base de um logaritmo através da fórmula:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplo:

Sabendo - se que $\log 2 \cong 0{,}301$ quanto vale $\log_2 5$?

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{\log\left(\frac{10}{2}\right)}{\log 2} = \frac{\log 10 - \log 2}{\log 2} = \frac{1 - 0{,}301}{0{,}301} \cong 2{,}322$$

Nota: nos livros em que uso como bibliografia neste ponto há o tópico *funções inversíveis*, que não estará nesta apostila. Aconselho que estude-o por livros.

Função logarítmica

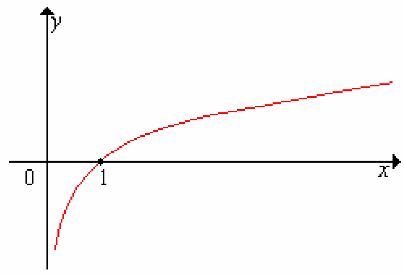
São funções que tem a incógnita definida em um logaritmo:

$$f(x) = \log_a x$$

$$0 < a \neq 1$$

Essas funções são amplamente utilizadas na Engenharia e na Economia.

Os gráficos das funções logarítmicas são construídos de forma análoga ao das outras funções. São similares a esse:



- Como $\log_a x > 0$, o conjunto domínio será sempre real, positivo e não nulo.
- Se $x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$. Portanto o gráfico cortará a abscissa no ponto (1,0).
- O gráfico de $f(x)\log_a x$ é simétrico e inverso ao gráfico $f'(x) = a^x$.

Propriedades:

1. Se $a > 1$ a função é **crescente**:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

2. Se $0 < a < 1$ a função é **decrescente**:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

3. Se $a > 1$ os números entre 0 e 1 tem valores **negativos** e os maiores que 1 tem valores **positivos**:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a \Rightarrow \log_a > 0$$

4. Se $0 < a < 1$ os números entre 0 e 1 tem valores **positivos** e os maiores que 1 tem valores **negativos**:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a \Rightarrow \log_a < 0$$

Equações exponenciais

Com todo o estudo já realizado sobre funções, agora podemos resolver equações do tipo $2^x = 5$. Se raciocinarmos, veremos que $2^2 = 4$ e $2^3 = 8$. Portanto $2 < x < 3$, o que não resolve nosso problema. Para resolve-la utilizamos a definição de logaritmo:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Veja:

$$2^x = 5 \Rightarrow \log_2 5 = x$$

Consultando uma tabela de logaritmos descobrimos o valor de $\log_2 5$ e encontramos o valor de x.

Equações logarítmicas

Resolvem-se as equações logarítmicas de diversos modos, dependendo da equação. Na maioria dos casos usam-se as propriedades ou a definição de logaritmo:

1. $\log_3(3x-2) = \log_3(x+4) \Rightarrow 3x-2 = x+4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

   $3x-2 = x+4 > 0 \Rightarrow 3\cdot 3-2 = 3+4 > 0$ (deve-se verificar se ambas as expressões são positivas, pois o logaritmando deve ser positivo)

   $S = \{3\}$

2. $\log x = 3 \Rightarrow 10^3 = x \Rightarrow x = 1000$

   $S = \{1000\}$

3. $(\log_3 x)^2 - 2\cdot\log_3 x = 3$ (fazendo $\log_3 x = y$)

   $y^2 - 2y - 3 = 0 \qquad y = 3$ ou $y = -1$

   $\log_3 x = y \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \log_3 x = 3 \Rightarrow x = 27$

   $\log_3 x = y \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

   $S = \left\{\dfrac{1}{3}, 27\right\}$

Utilize as propriedades para desenvolver a equação de modo a chegar em um desses três métodos.

Inequações exponenciais

A resolução das inequações exponenciais que não podem ser reduzidas a mesma base utiliza os logaritmos, assim como nas equações exponenciais. Resolva-as através dessas expressões:

$$a^x > b \Leftrightarrow \log_a a^x > \log_a b \Leftrightarrow x\log_a a > \log_a b \Leftrightarrow x > \log_a b \text{ (se } a > 1)$$

$$a^x > b \Leftrightarrow \log_a a^x < \log_a b \Leftrightarrow x\log_a a < \log_a b \Leftrightarrow x < \log_a b \text{ (se } 0 < a < 1)$$

$$a^x < b \Leftrightarrow \log_a a^x < \log_a b \Leftrightarrow x\log_a a < \log_a b \Leftrightarrow x < \log_a b \text{ (se } a > 1)$$

$$a^x < b \Leftrightarrow \log_a a^x > \log_a b \Leftrightarrow x\log_a a > \log_a b \Leftrightarrow x > \log_a b \text{ (se } 0 < a < 1)$$

Inequações logarítmicas

Há dois casos a considerar:

- A inequação pode ser reduzida a logaritmos de mesma base

  $$\log_a f(x) < \log_{ax} g(x) \Rightarrow 0 < f(x) < g(x) \text{ (se } a > 1)$$

  $$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) > 0 \text{ (se } 0 < a < 1)$$

- A inequação é reduzida a um logaritmo e um número real

  $$\log_a f(x) > r \Rightarrow \log_a f(x) > \log_a a^r$$

Assim como nas equações, utilize as propriedades dos logaritmos para resolver as inequações logarítmicas (logaritmo de produto, de quociente, mudança de base etc).

Neste ponto há o tópico *Logaritmos decimais*. Aos que prestarão exame na área de exatas, estude-os.

Bibliografia

IEZZI, Gelson. *Matemática: 1ª série, 2º grau*. São Paulo. Atual, 1981.

IEZZI, Gelson e DOLCE, Oswaldo e DEGENSZAJN, David Mauro e PÉRIGO, Roberto. *Matemática: volume único*. São Paulo. Atual, 1997.