Progressões

Em inúmeras situações de nossa vida precisamos colocar os elementos de um dado conjunto em uma ordem estabelecida, o que chamamos sucessões. Por exemplo, as estações de uma linha de trem se encontram em sucessão, estabelecidas em certa ordem. Podemos enumerar os elementos de um conjunto em certa ordem utilizando índices, sendo o primeiro a_1, o segundo a_2 e assim por diante.

Quando tratamos de conjuntos de números e há uma relação de soma ou produto entre os elementos desse temos o que chamamos de **progressões**.

Progressão Aritmética

São sucessões que apresentam uma soma que relaciona os seus termos. Assim sendo, uma **progressão aritmética (P.A.)** é uma sucessão de números em que a diferença entre um e seu antecedente é sempre constante. Essa diferença constante é chamada **razão** da P.A. Por exemplo, $(2,5,8,11,14,\ldots)$ é uma P.A. de razão r=3, pois 5 – 2 = 8 – 5 = 11 – 8 = 3.

Termo geral de uma P.A.

Para obtermos um número qualquer dentro de uma P.A., conhecendo o seu primeiro termo, aplicamos a fórmula:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r}$$

onde a_n é o termo que se deseja encontrar, n a posição do termo na P.A., a_1 o primeiro termo da P.A. e r a razão da P.A. Por exemplo, na progressão (3,5,7,9,...) qual o valor do termo a_{35}?

$$r = 5-3 = 7-5 = 9-7 = 2$$

$$a_{35} = a_1 + (35-1)\cdot r = 3 + 34\cdot 2 = 71$$

Portanto, o valor é 71.

Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Para se somar n termos de uma P.A., conhecendo o primeiro termo, utiliza-se a fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}}$$

Por exemplo, qual a soma da P.A. (1542,1588,1634,1680,1726)?

A P.A. possui cinco termos. Portanto teremos a soma de S_5

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5)\cdot 5}{2} = \frac{(1542+1726)\cdot 5}{2} = 8170$$

Exercite! Em princípio parece simples o conceito de P.A., mas há exercícios complexos que exigem raciocínio. Portanto, exercite.

Progressão Geométrica

A progressão geométrica (P.G.) é uma sucessão semelhante à P.A., com a diferença que ao invés de somarmos a razão aos termos da progressão, multiplicamos. Por exemplo, está em P.G. o intervalo (3,9,27,81,243,...) pois 9 : 3 = 27 : 9 = 81 : 27 = 243 : 27 = 3. Ou seja, a razão dessa P.G. é 3, indicada pela letra q.

Termo geral de uma P.G.

Para encontrar qualquer termo de uma P.G. utilizamos a fórmula:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Por exemplo, na P.G. (1,2,4,8,16,32,...) qual o valor do termo a_{20}?

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_{20} = a_1 \cdot 2^{20-1} = 1\cdot 2^{19} = 524288$$

Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Para somarmos os n primeiros termos de uma P.G. utilizamos a fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1\cdot(q^n - 1)}{q-1}}$$

Por exemplo, qual a soma dos termos desta P.G.: (5,25,125,625,3125,15625)?

Temos 6 termos, portanto $n = 6$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{25}{5} = 5$$

$$S_6 = \frac{a_1 \cdot (5^6 - 1)}{5 - 1} = \frac{5 \cdot (15625 - 1)}{4} = 19530$$

Série geométrica convergente

Vamos somar os n primeiros termos desta P.G.: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$.

$$S_5 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = 1{,}9375 \qquad S_{10} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \cong 1{,}998 \qquad S_{20} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \cong 1{,}999998$$

Note que conforme o valor de n aumenta, o valor da soma dos termos da P.G. se aproxima do valor 2. Quando isso ocorre dizemos que a soma dos n primeiros termos da P.G. **converge** para um valor. Isso acontece com P.G.s que possuem razão entre –1 e 1.
Para descobrirmos o valor ao qual a P.G. converge, utilizamos a fórmula:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}; -1 < q < 1}$$

Por exemplo, para o exemplo acima, vamos provar que q converge para 2.

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

O estudo das progressões é de enorme importância para a vida. Através dele podemos, por exemplo, compreender a célebre frase de Thomas Malthus (1766 – 1834): *"enquanto a população cresce em progressão geométrica, a produção de alimentos cresce em progressão aritmética"*.

Estude bastante as progressões, fazendo a maior quantidade de exercícios possíveis. Esse item é obrigatório em qualquer vestibular.

Bibliografia

IEZZI, Gelson. *Matemática: 2ª série, 2º grau*. São Paulo. Atual, 1980.
IEZZI, Gelson e DOLCE, Oswaldo e DEGENSZAJN, David Mauro e PÉRIGO, Roberto. *Matemática: volume único*. São Paulo. Atual, 1997.