Teoria dos conjuntos

O que são Conjuntos?

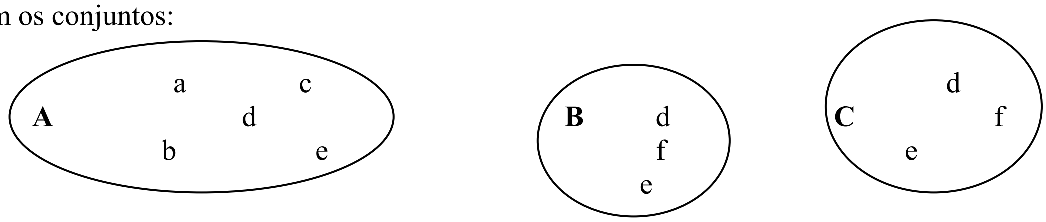
Conjunto é qualquer coleção de objetos. Os objetos são os **elementos** do conjunto e dizemos que **pertencem** ao mesmo. Como exemplo de conjunto podemos citar o Campeonato Brasileiro de Futebol, onde seus elementos são os times e que Corinthians, Flamengo e Grêmio pertencem a esse conjunto. Outro exemplo de conjunto é o conjunto dos números múltiplos de 5 (25, 125, 625, etc).

Por quê estudamos os conjuntos em Matemática?

Os Conjuntos fornecem um padrão de linguagem para a Matemática. Quando determinamos os possíveis resultados de uma inequação, a teoria dos conjuntos nos permite compreendermos de forma simples e rápida os valores que nos interessam. Outra aplicação muito importante dos conjuntos é na Estatística, onde o estudo sobre um conjunto de dados coletados permite tomarmos decisões quanto a acontecimentos futuros.

Relações nos conjuntos

Sejam os conjuntos:



Matematicamente eles ficam da seguinte forma:

$$A=\{a, b, c, d, e\}$$
$$B=\{d, e, f\}$$
$$C=\{d, e, f\}$$

Dizemos que:

a *pertence* ao conjunto **A**. Matematicamente:

$$a \in A$$

Do mesmo modo:

$$f \notin B$$

(lê-se **f** *não pertence* ao conjunto **A**).

Quando o conjunto possui infinitos valores, como o conjunto dos números pares, utilizamos matematicamente:

$$P=\{x \mid x \text{ é par}\}$$

(lê-se P é o conjunto dos x *tal que* x é par).

Para que um conjunto seja igual a outro, **todos** os elementos do primeiro devem ser iguais aos do segundo. Caso um ou mais dos elementos não seja igual, os conjuntos são diferentes. Assim, no nosso exemplo:

$$B = C$$
$$A \neq B$$

Diz-se **conjunto-universo** ao conjunto do qual se faz o estudo. Se estivermos analisando o conjunto de crianças que passam fome, seu conjunto-universo poderá ser o Brasil, a África, a cidade de São Paulo, etc.

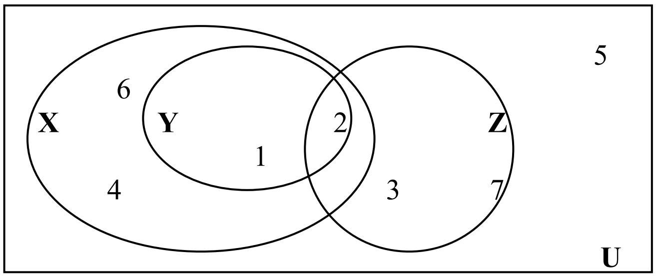
Diz-se ainda **conjunto unitário** o conjunto formado por apenas **um** elemento, e **conjunto vazio** o formado por **nenhum** elemento. Matematicamente,

$D=\{2\}$ – conjunto unitário

$T=\varnothing$ ou $T=\{\ \}$ – conjunto vazio

Preste atenção: **não** se representa o conjunto vazio como $A=\{\varnothing\}$; é errado.

Sejam agora os conjuntos:



X = {1, 2, 4, 6}
Y = {1, 2}
Z = {2, 3, 7}
U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Obs.: U é o conjunto universo, ou seja, o conjunto dos números que vão de 1 à 7.

Diz-se que:

- Y **está contido** em X ($Y \subset X$), ou seja, Y é **subconjunto** de X. Note que todos os elementos de Y são elementos de X também. Da mesma forma, X **contém** Y ($X \supset Y$).
- Da mesma forma, Y **não está contido** em Z ($Y \not\subset Z$).
- Como há elementos de X que não pertencem a Y e todos os elementos de Y pertencem a X, podemos ter o que chamamos de **conjunto complementar**, onde os elementos desse conjunto são os que não pertencem ao conjunto que está contido. No nosso exemplo:

$$C_X^Y = \{4, 6\}$$

(lê-se *complementar* de Y em relação à X)

- Os elementos de Z que não pertencem à X chama-se **diferença** Z – X. No nosso exemplo:

$$Z - X = \{3, 7\}$$

(lê-se *diferença* Z *menos* X)

- A **interseção** entre os conjuntos X e Z é o conjunto formado pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos ao mesmo tempo. No nosso exemplo:

$$X \cap Z = \{2\}$$

(lê-se X *inter* Z)

- A **união** entre os conjuntos X e Z é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a Z, a X e a ambos. No nosso exemplo:

$$X \cup Z = \{1, 4, 6, 2, 3, 7\}$$

(lê-se X *união* Z)

- Dois conjuntos que possuem interseção vazia são chamados **disjuntos**.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os conjuntos numéricos são conjuntos formados por números que possuem alguma característica em comum. Todo o estudo da Matemática tem por base esses conjuntos.

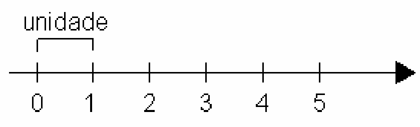
No Ensino Fundamental e Médio estudam-se os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos.

***Números Naturais* N**

São os números primitivos surgidos com a necessidade da contagem. Todos os outros conjuntos são expansão desse. São representados por:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., n, ...\}$$

sendo **n** um elemento genérico do conjunto. Graficamente:



Subconjuntos de N:

$N^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ $\forall n \in N$ e $n \neq 0$ – $N^* = N - \{0\}$ – (números naturais não nulos}

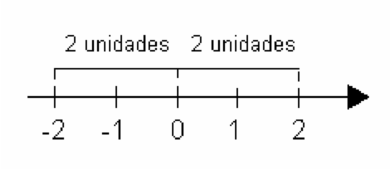
N_P={0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...} $\forall n \in N$ – (números naturais positivos)
N_I={1, 3, 5, 7, ..., 2n+1, ...} $\forall n \in N$ – (números naturais ímpares)
P={2, 3, 5, 7, 11, 13, ...} – (números primos)
<u>Operações em N:</u>
Adição: $\forall n, m \in N \Rightarrow n+m \in N$
Multiplicação: $\forall n, m \in N \Rightarrow n.m \in N$
(disso resulta que "N é *fechado* em relação à adição e multiplicação").

***Números Inteiros* Z**

Resultam da adição do conjunto dos números menores que zero. São representados por:

$$Z=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

<u>Subconjuntos de Z:</u>
Z*={..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...} – Z*=Z – {0}
Z_+={0, 1, 2, 3, ...} – (inteiros não negativos) – Z_+=N
Z_+*={1, 2, 3, 4, ...} – (inteiros positivos)
Z-={-3, -2, -1, 0} – (inteiros não positivos)
Z-*={-3, -2, -1} – (inteiros negativos)
<u>Operações em Z:</u>
"Z é fechado em relação à adição, multiplicação e subtração".
Diz-se que dois números **opostos** ou **simétricos** entre si quando eles possuírem mesma distância da origem:



$\therefore$ 2 e –2 são opostos entre si.
Chama-se **módulo** de um número a distância, em unidades, da origem.
Por exemplo:
$|2| = 2$
$|-2| = 2$

***Números Racionais* Q**

Englobam os números resultantes da operação de divisão de inteiros. São representados por Q:

$$Q = \left\{ ..., -3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 2, \frac{5}{2}, ... \right\}$$

Genericamente,

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z \text{ e } q \in Z^* \right\}$$

"O conjunto Q é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão".
<u>Forma decimal:</u>
$\frac{1}{10} = 0{,}1$, $\frac{3}{2} = 1{,}5$, $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$, $\frac{1}{22} = 0{,}0454545... = 0{,}0\overline{45}$ (os dois últimos são chamados **dízima periódica**, pois são uma divisão cujo quociente possui infinitas casas decimais).
*Como atingir a forma fracionária (*fração geratriz*) de um número decimal?*

Não periódicos:

$$0{,}76 = \frac{76}{100} = \frac{76:4}{100:4} = \frac{19}{25}$$

Periódicos:

$$0{,}0\overline{45}:$$
$$x = 0{,}0454545...$$
$$100x = 4{,}5454545...$$
$$100x - x = 4{,}54545... - 0{,}0454545...$$
$$99x = 4{,}5$$
$$x = \frac{45}{990} = \frac{1}{22}$$

***Números Irracionais* I**

São números cujas casas após a vírgula tendem ao infinito sem periodicidade:

$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$, $\pi = 3{,}1415926...$

Os números racionais não estão contidos nos números irracionais.

***Números Reais* R**

É a reunião do conjunto dos racionais com os irracionais.

$$\mathrm{R} = \left\{...,-3,\frac{-5}{2},-2,-\sqrt{2},-1,-\frac{1}{3},0,1,\frac{3}{2},\sqrt{3},2,3,\pi,...\right\}$$

$\mathrm{R}^* = \mathrm{R} - \{0\}$

$\mathrm{R}_+ = \{x \in \mathrm{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathrm{R}_- = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leq 0\}$

$\mathrm{R}_+^* = \{x \in \mathrm{R} \mid x > 0\}$

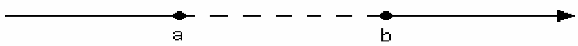
$\mathrm{R}_-^* = \{x \in \mathrm{R} \mid x < 0\}$

Obs.: vale para os racionais, irracionais e, conseqüentemente, para os reais, os conceitos de números opostos entre si e módulo.

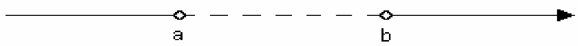
<u>Intervalos reais</u>

São conjuntos que representam intervalos de números reais:

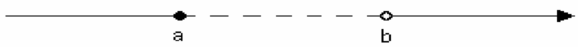
Exemplos:

$\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{R} \mid \mathrm{a} \leq x \leq \mathrm{b}\} = [\mathrm{a},\mathrm{b}]$ A 

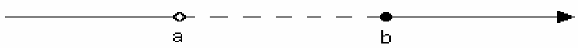
.

$\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{R} \mid \mathrm{a} < x < \mathrm{b}\} =]\mathrm{a},\mathrm{b}[$ B 

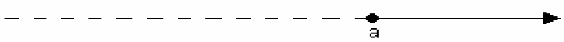
.

$\mathrm{C} = \{x \in \mathrm{R} \mid \mathrm{a} \leq x < \mathrm{b}\} = [\mathrm{a},\mathrm{b}[$ C 

.

$\mathrm{D} = \{x \in \mathrm{R} \mid \mathrm{a} < x \leq \mathrm{b}\} =]\mathrm{a},\mathrm{b}]$ D 

.

$\mathrm{E} = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leq \mathrm{b}\} =]\text{-}\infty,\mathrm{a}]$ E 

.

Complete com os outros possíveis conjuntos. Represente suas interseções e uniões.

Bibliografia

IEZZI, Gelson. *Matemática: 1ª série, 2º grau*. São Paulo. Atual, 1981.

IEZZI, Gelson e DOLCE, Oswaldo e DEGENSZAJN, David Mauro e PÉRIGO, Roberto. *Matemática: volume único*. São Paulo. Atual, 1997.