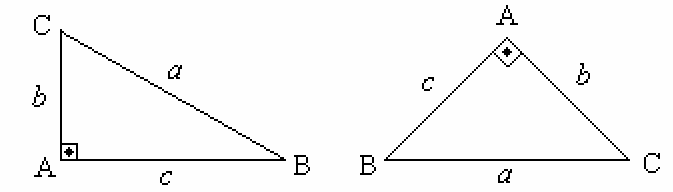
Trigonometria

Introdução

A trigonometria é um importante ramo da Matemática. Derivada da Geometria (o termo trigonometria significa medida dos triângulos) é uma importante ferramenta para a compreensão da Álgebra. Se você pretende ser Engenheiro (qualquer que seja o curso), Físico, Arquiteto, Geólogo, entre outras profissões que envolvem cálculo, tenha em mente que a trigonometria é ferramenta básica. Caso você não goste de trigonometria, mude de curso.

O triângulo retângulo

A trigonometria estuda todos os triângulos, mas em especial o triângulo retângulo. Esse triângulo possui um ângulo de 90°:



Do estudo dos triângulos e em especial do triângulo retângulo, temos as propriedades:

$$\hat{A} = 90°$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 90° \text{ (ângulos complementares)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (teorema de Pitágoras)}$$

Note que o nome dos segmentos de retas que formam os lados estão em letras minúsculas e opostas ao nome dos ângulos (o segmento a é oposto ao ângulo Â e assim por diante).

Os lados do triângulo retângulo possui nomes especiais:

- a é o maior lado, chamado de **hipotenusa**;
- b e c são os **catetos**. Em relação a $\hat{B}$, b é o **cateto oposto** e c é o **cateto adjacente**. Da mesma forma, em relação a $\hat{C}$, c é o cateto oposto e b é o cateto adjacente.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

São razões (quocientes) entre os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Cada ângulo de um triângulo possuiu somente um valor de razão, seja qual for o ângulo e seja qual for a relação. Da mesma forma, a cada valor de razão no triângulo existe apenas um ângulo correspondente.

<u>Seno</u>

É a razão entre o **cateto oposto** a um ângulo e a **hipotenusa**:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

<u>Cosseno</u>

É a razão entre o **cateto adjacente** a um ângulo e a **hipotenusa**:

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

<u>Tangente</u>

É a razão entre o **cateto oposto** a um ângulo e o **cateto adjacente** a esse ângulo:

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}{\text{cateto adjacente a }\hat{B}} = \frac{b}{c}$$

Propriedade entre seno e cosseno

Como os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares, temos a seguinte propriedade:

$$\text{sen}\,x = \cos(90° - x) \text{ ou } \cos x = \text{sen}(90° - x)$$

Relações fundamentais

Temos duas relações fundamentais entre as razões trigonométricas:

Relação Fundamental I

É a relação entre seno e cosseno de um mesmo ângulo. Deriva do teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Note que quem é elevado ao quadrado é o **seno** e o **cosseno**, e não o ângulo:

$$\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2 \neq \operatorname{sen} x^2$$

Relação Fundamental II

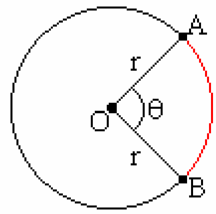
É a relação entre seno, cosseno e tangente de um mesmo ângulo. Deriva da definição de tangente:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Funções circulares

Arcos e sistemas de medidas

Chama-se **arco** à parte de uma circunferência compreendida entre dois pontos nela contidos:



Assim sendo, nessa circunferência temos dois arcos, o arco menor, compreendido pelo ângulo θ e o arco maior.

A medida do **arco** (e não do ângulo θ) é a comparação com uma unidade de medida, e pode ser expressa de duas formas:

- *Graus*: é o arco equivalente a 1 parte de 360 da circunferência (divide-se a circunferência em 360 partes e se retira um, sendo na medida de 1°).
- *Radianos*: é o arco equivalente ao comprimento de um raio da circunferência (marca-se a medida de um raio na circunferência e se tem um arco de 1rad).

Sendo assim, o arco de 360° (volta completa) equivale à mediada da circunferência (2πr). Como um radiano equivale a um raio, em radianos fica 2.π.r = 2.π.1=2π rad. Através disso utilizamos a regra de três e convertemos medidas de graus para radianos:

$$360° \leftrightarrow 2\pi \text{ rad (simplificando por 2)}$$

$$180° \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

Por exemplo, um arco de 57° equivale:

$$180° \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$57° \leftrightarrow x \text{ rad}$$

$$x = \frac{57 \cdot \pi}{180} \cong 1 \text{ rad}$$

Medidas de ângulos na circunferência

Na circunferência acima apresentada, a medida do **ângulo** θ (AÔB) é igual a medida do arco AB, seja em graus ou radianos.

Comprimento de um arco

O comprimento (ℓ) de um arco é dado unidades utilizadas pelo sistema internacional. Por exemplo, um arco pode ter o comprimento de 3cm. Para determina-lo utilizamos a medida em radianos, pois essa medida está relacionada com o raio, dado em mm, cm, m etc:

$$\ell = r \cdot \alpha$$

onde ℓ é o comprimento do arco, r o comprimento do raio e α a medida do arco em radianos.

Por exemplo, um arco de medida 2 rad e comprimento de raio 4 cm tem o comprimento de 2.4 = 8cm.

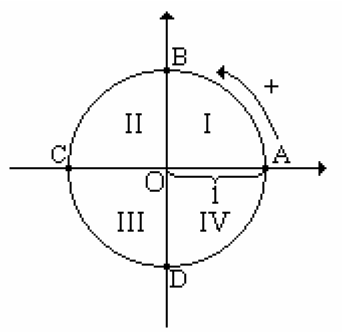
Ângulos notáveis

São ângulos com uma maior taxa de utilização e uma maior facilidade para determinar o valor do seno, cosseno ou da tangente. Não veremos como determina-los, mas os valores são:

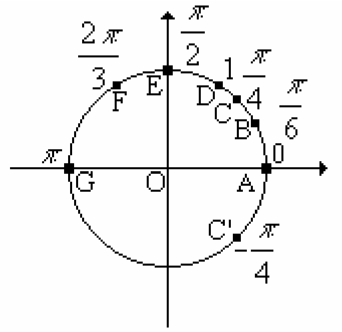
Razão \ Ângulo	$30°$ ou $\frac{\pi}{6}$	$45°$ ou $\frac{\pi}{4}$	$60°$ ou $\frac{\pi}{3}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ciclo trigonométrico

Coloquemos sobre o plano cartesiano uma circunferência que coincide com a origem dos eixos e de raio unitário (igual a 1 e sem medida). A esse sistema damos o nome de **ciclo trigonométrico**.



I, II, III e IV são os quadrantes do ciclo. Como o raio é unitário, o comprimento da circunferência será de 2π. Os pontos A, B, C e D estão na circunferência e também no plano cartesiano. Logo, associamos pares ordenados a eles: A(1,0), B(0,1), C(-1,0) e D(0,-1). Podemos, pois, associar a cada ponto do ciclo (chamado de imagem) um número real. O sentido apontado pela flecha é o positivo, e obviamente o outro sentido é o negativo.



Nessa circunferência temos o número 1, por exemplo, cuja imagem é D. Note a imagem C', que é negativa. Todos esses pontos representam números reais. Entretanto, os números podem ser representados no intervalo de $0 \leq x < 2\pi$. Para números maiores que esse, por exemplo 3π, inicia-se outra volta. Acompanhe o raciocínio:

$$3\pi = \pi + 2\pi$$

Ora, 2π é a medida de uma circunferência, logo o número 3π é igual a uma volta mais π. Assim, a imagem do número 3π é o mesmo do número π. Da mesma forma, para assinalarmos o número $\frac{95\pi}{2}$ decompomos o número até acharmos a imagem congruente presente entre 0 e 2π:

$$\frac{95\pi}{2} = \frac{92\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 46\pi + \frac{3\pi}{2} = 23 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Decompondo o número vemos que ele dá 23 voltas (23. 2π) mais $\frac{3\pi}{2}$. Portanto a imagem se encontra no ponto congruente a $\frac{3\pi}{2}$.

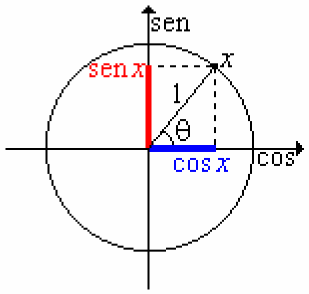
Generalizando, a imagem de um número real é um ponto no ciclo que pode ser caracterizado por:

$$\text{M} = \{x \in \text{R} \mid x = x_0 + 2k\pi, k \in \text{Z}\}$$

onde M é o conjunto das imagens do ponto, x a imagem a se marcada, x_0 o número real congruente a x compreendido entre 0 e 2π e k um número inteiro qualquer que indica o número de voltas necessárias para a imagem de x.

Função seno e função cosseno

Vimos que podemos associar qualquer número real no ciclo trigonométrico. Se associarmos um número x qualquer, a projeção de x no eixo das ordenadas estará em função do ângulo θ que x forma com a origem. Da mesma forma, a projeção no eixo das abscissas também estará em função do ângulo de x. A essas funções damos, respectivamente, os nomes de **função seno** e **função cosseno**. De fato, se analisarmos os triângulos formados pelas projeções veremos que o valor encontrado é igual ao seno ou cosseno do ângulo, pois a hipotenusa é igual a 1:



Podemos notar que os valores para seno e cosseno estarão entre –1 e 1, ou seja, limitará o conjunto imagem dessas funções nesses dois valores. Matematicamente as funções são definidas como:

$$y = \text{sen}\, x$$

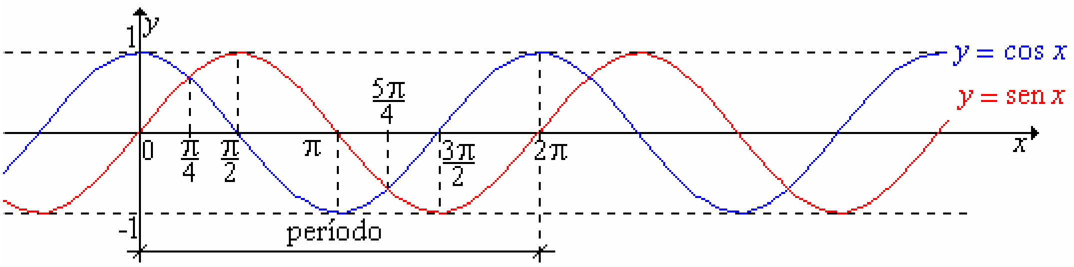
$$y = \cos x$$

Valores notáveis

Os valores dos senos e cossenos são os mesmos já estudados para os triângulos retângulos. Portanto vale a tabela já apresentada.

Gráficos

Os gráficos gerados pelas funções circulares seno e cosseno possuem a forma apresentada abaixo. Suas curvas são chamadas **senóide** e **cossenóide**.



Período e imagem

O período das funções senoidais é o menor intervalo que a função progride sem haver repetição. No gráfico acima, o período para ambas as funções é de 2π. O conjunto imagem está situado, como já dito, entre –1 e 1, como percebe-se no gráfico.

Agora, seja a função:

$y = \text{sen}(\text{m}x) + \text{n}$ com m e n reais e $\text{m} \neq 0$

- O valor de m modificará o período da função. Para sabermos utilizamos a fórmula:

$$\text{P} = \frac{2\pi}{|\text{m}|}$$

- O valor de n modificará o intervalo do conjunto imagem. Se analisarmos, o seno ou cosseno de um ângulo estará entre –1 e 1; ao somarmos o valor de n a esse intervalo, o conjunto imagem da função irá modificar junto.

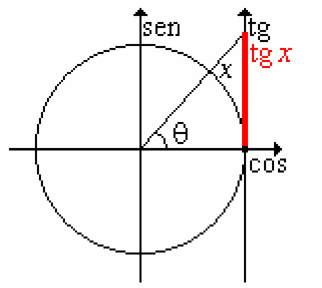
Função tangente

Vimos a relação fundamental I onde tangente é o quociente do seno pelo cosseno. Assim sendo, a função tangente é definida por:

$$f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \text{tg}\, x$$

Entretanto sabemos que o denominador nunca poderá ser nulo. Assim sendo,

No ciclo trigonométrico temos a representação da tangente da seguinte forma:



Vale para a tangente também os valores para ângulos notáveis já apresentados.

Gráfico

O gráfico da função tangente é periódico e com interrupções nos números definidos por $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Não o representarei por não ser muito cobrado em vestibulares.

Outras funções circulares

- <u>Função cotangente</u>: é a função definida por:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \text{cotg}\, x$$

Assim como na tangente, $\text{sen}\, x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- <u>Função secante</u>: é a função definida por:

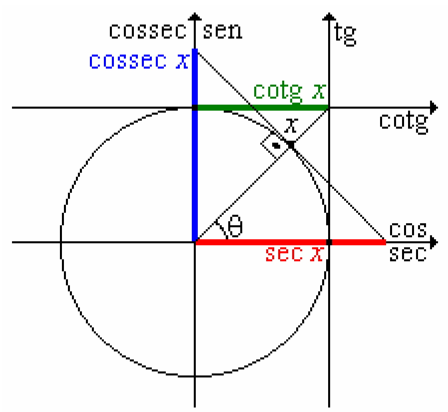
$$f(x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

sendo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- <u>Função cossecante</u>: é a função definida por:

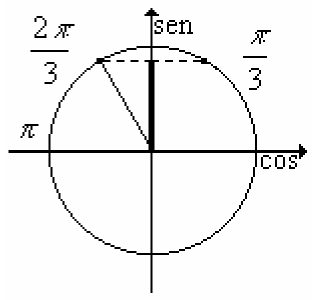
$$f(x) = \frac{1}{\text{sen}\, x} = \text{cossec}\, x$$

sendo $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Redução ao primeiro quadrante

Para conseguirmos determinar o valor das funções no ciclo trigonométrico, utilizamos o artifício de reduzir o número ao primeiro quadrante e determinar o valor via razão de simetria. Por exemplo, para determinar o valor de $\text{sen}\frac{2\pi}{3}$, localizamos o número no ciclo trigonométrico e em relação ao eixo dos senos traçamos uma perpendicular até o primeiro quadrante. Depois fazemos a seguinte análise:



- O valor do seno de $\frac{2\pi}{3}$ é numericamente igual ao valor do seno de $\frac{\pi}{3}$, pois ambos os números estão situados em pontos no ciclo simétrico ao eixo dos senos. Pela tabela, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Indo mais além, se fizermos $\pi-\frac{2\pi}{3}$ encontraremos, $\frac{\pi}{3}$, o que nos leva a conclusão que $\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$. Generalizando, dado um número x pertencente ao segundo quadrante,

$$\boxed{\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(\pi-x)}$$

Essa análise pode ser feita para determinar o valor de qualquer função circular. Faça para a redução das funções seno, cosseno e tangente em todos os quadrantes. Lembre-se: apenas exercitando é que se aprende Matemática!

Relações fundamentais e decorrentes

As relações fundamentais já foram vistas durante o estudo até aqui. Preste atenção:

Relação fundamental I	$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1, \forall x$
Relação fundamental II	$\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \forall x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
Relação fundamental III	$\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \forall x \neq k\pi$
Relação fundamental IV	$\sec x=\frac{1}{\cos x}, \forall x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
Relação fundamental V	$\operatorname{cossec} x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}, \forall x \neq k\pi$

Dessas relações decorrem outras três:

Relação decorrente I	$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}, \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$
Relação decorrente II	$\operatorname{tg}^2 x+1=\sec^2 x, \forall x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
Relação decorrente III	$\operatorname{cotg}^2 x+1=\operatorname{cossec}^2 x, \forall x \neq k\pi$

Em todos os casos $k \in Z$. Neste ponto há o tópico *Identidades*. Quem prestar vestibular na área de exatas estude-o.

Transformações trigonométricas

São fórmulas para determinar uma razão trigonométrica de um número através da decomposição do mesmo. Apresentarei apenas as mais cobradas em vestibulares. Como já dito, caso você prestará vestibular na área de exatas, estude as demais transformações.

Fórmulas de adição

Cosseno da soma:

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \cdot \operatorname{sen} 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Cosseno da diferença:

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \cdot \operatorname{sen} 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Seno da soma:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}$$

$$\operatorname{sen} 105° = \operatorname{sen}(60° + 45°) = \operatorname{sen} 60° \cdot \cos 45° + \operatorname{sen} 45° \cdot \cos 60° =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Seno da diferença:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a}$$

$$\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen}(60° - 45°) = \operatorname{sen} 60° \cdot \cos 45° - \operatorname{sen} 45° \cdot \cos 60° =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Tangente da soma:

$$\boxed{\operatorname{tg}(a + g) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}}$$

Válida para $a, b \text{ e } a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

Tangente da diferença:

$$\boxed{\operatorname{tg}(a - g) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}}$$

Válida para $a, b \text{ e } a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

Fórmulas de multiplicação

Cossenos:

$$\boxed{\cos 2 \cdot a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$$

Seno:

$$\boxed{\operatorname{sen} 2 \cdot a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a}$$

Tangente:

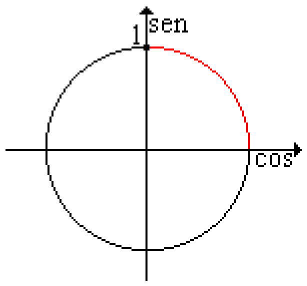
$$\boxed{\operatorname{tg} 2 \cdot a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}$$

Equações trigonométricas

A resolução de equações trigonométricas (equações que envolvem razões trigonométricas) pode ser feita de diversas maneiras. As principais dicas para a resolução são visualizar o ciclo trigonométrico, utilizar as relações fundamentais, decorrentes e as fórmulas de transformação. Aqui apresentarei poucas resoluções. Portanto, exercite o máximo que puder esse tópico.

- Resolver $\operatorname{sen} x = 1$

  Pergunta-se: para quais valores de x, sen x = 1? Olhe o ciclo trigonométrico:

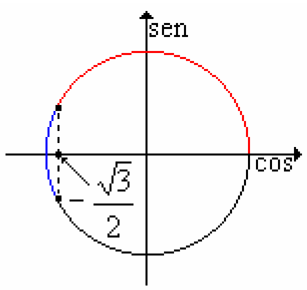


Mas sabemos que o arco cujo seno vale 1 é $\frac{\pi}{2}$. Entretanto, na imagem desse número não há somente um número, mas infinitos números. Portanto, a solução da equação será:

$$S = \left\{ x \in R \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

- Resolver $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Da mesma forma, visualizando o ciclo trigonométrico encontraremos os valores para x que satisfazem a equação:



Neste caso há dois arcos possíveis que satisfazem a equação, o arco $\frac{4\pi}{6}$ e o arco $\frac{5\pi}{6}$.

Logo, a solução fica:

$$S = \left\{ x \in R \mid x = \frac{4\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

- Resolver: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$$\text{Faz - se } \cos x = t$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ ou t} = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = t \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in Z$$

$$\cos x = t \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$

$$S = \left\{ x \in R \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

Há outras formas de resolução para equações mais complexas. Estude-as!

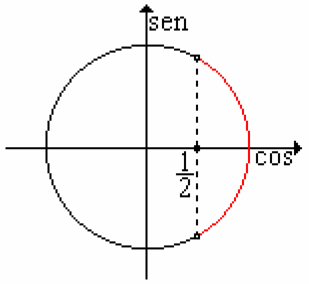
Inequações trigonométricas

Da mesma forma que as equações, as inequações possuem diversas resoluções, utilizando dos mesmos processos. Não me estenderei no assunto, apenas apresentarei o conceito:

- Para resolução de uma inequação trigonométrica, tente reduzi-la a uma das formas fundamentais ($\text{sen}\, x > a, \text{sen}\, x < a, \cos x > a, \cos x < a, \text{tg}\, x > a$ ou $\text{tg}\, x < a$) e depois faça a análise do intervalo requerido no ciclo trigonométrico.

Ex: $\cos x > \frac{1}{2}$

No ciclo, qual o intervalo que satisfaz a inequação?



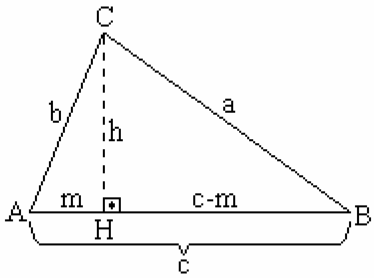
O intervalo de números do ciclo que possuem cosseno maior que ½. Portanto a solução fica:

$$S = \left\{ x \in R \mid 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2k\pi + \frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi + 2k\pi \right\}$$

As equações e inequações são cobradas, porém com maior taxa nos vestibulares de exatas. Estude-as através da resolução de exercícios, único meio de aprendê-las.

Resolução de triângulos

Resolver um triângulo significa encontrar todas as medidas dos ângulos, dos lados e a área. Para isso utilizamos todas as relações já vistas e importantes notações da Geometria Plana vistas no Ensino Fundamental. Caso você não as lembra, estude-as. Os teoremas fora extraídos de *Matemática: volume único* de Gelson Iezzi, nas páginas 329 à 336. Para a apresentação das fórmulas de resolução utilizaremos esse triângulo:



Lei dos Senos ou Teorema dos Senos

- *Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.*

Matematicamente:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

Lei dos Cossenos ou Teorema dos Cossenos

- *Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual a soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.*

Matematicamente:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{array}}$$

Expressões da área de um triângulo

Em função de um lado e da altura relativa a esse lado

- A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{c \cdot h}{2}}$$

Em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido entre eles

- A área é igual à metade do produto de dois lados pelo seno do ângulo formado por eles

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\, C}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\, B}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\, A}{2}}$$

Em função dos lados – fórmula de Hierão.

- A área é igual à raiz quadrada do produto do semi-perímetro pela diferença do semi-perímetro e os lados. Semi-perímetro é igual à metade do perímetro. Matematicamente:

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (semi - perímetro)}$$

$$\boxed{S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}$$

Aqui finalizamos o estudo de trigonometria. Daqui para frente, as razões trigonométricas aparecerão sempre, principalmente no estudo de Números Complexos. Certifique-se de que tenha compreendido os conceitos passados. Lembre-se EXERCITE e assim aprenderá.

Bibliografia

IEZZI, Gelson. *Matemática: 1ª série, 2º grau*. São Paulo. Atual, 1981.

IEZZI, Gelson e DOLCE, Oswaldo e DEGENSZAJN, David Mauro e PÉRIGO, Roberto. *Matemática: volume único*. São Paulo. Atual, 1997.